FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PROYECTO DE DOCENCIA 06-015

MATEMATICA ELEMENTAL

Z **IR**

$$\sqrt{25} = 5 \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$f(x) = y$$

Prof. Braulio Brevis Muñoz
Prof. Roberto Riquelme Sepúlveda

2008

Contenido

Introducción

Este texto electrónico (CD) es el producto del Proyecto de Docencia 06-015

En la estructura de desarrollo de este texto electrónico, primeramente a modo de fundamentación presentamos dieciséis ejercicios que muestran un alto porcentaje de error por parte de los alumnos de diferentes carreras que cursan asignaturas de Matemática en primer año.

Posteriormente, desarrollamos cinco capítulos relacionados con Aritmética y Algebra Básica, teniendo como propósitos:
1. Repasar los conceptos teóricos que respaldan la solución de los dieciséis ejercicios presentados en la fundamentación.
2. Repasar otros conceptos teóricos básicos de Aritmética y Algebra.

En el desarrollo de cada capítulo aparecen los conceptos teóricos, ejemplos aclaratorios y ejercicios con sus respuestas.

Para trabajar con el texto, le sugerimos el siguiente plan metodológico:
1. Revisar el material teórico y los ejemplos desarrollados.
2. Cuando se considere entendido el material, tratar de resolver los ejercicios que se presentan al final de cada tema sin recurrir al material. Si no puede contestarlos significa que no ha entendido el tema. Será necesario entonces repasar y resolver de nuevo los ejercicios. Posteriormente, comparar sus respuestas con las entregadas en el texto.

Finalmente, presentamos una Prueba Final para su auto-evaluación.

Tenemos la certeza que los propósitos descrito anteriormente, van a ayudar a nuestros futuros alumnos a no cometer errores básicos de Aritmética y Algebra al enfrentar las asignaturas de Matemática en primer año.

Los Autores

Fundamentación

Es una realidad que un alto porcentaje de alumnos de diferentes carreras que cursan asignaturas de Matemáticas en primer año, presentan errores básicos de Aritmética y Algebra, a modo de muestra presentamos dieciséis ejercicios con la solución correcta y el error común.

EJERCICIO 1.

- ✓ Evalué

$$\frac{13}{0}$$

Solución.

$$\frac{13}{0} = Indefinido$$

Error Común

$$\frac{13}{0} = 0$$

Cuando el denominador es “0” el cociente es indefinido.

EJERCICIO 2.

- ✓ Evalué la expresión

$$\frac{7(x+y)}{7y}$$

Solución.

$$\frac{7(x+y)}{7y} = \frac{x+y}{y}$$

Error Común

Evaluar la expresión como igual a “x”, cancelando la letra y en el numerador y denominador, sin ser “factor” tanto del numerador como del denominador.

EJERCICIO 3.

- ✓ Defina el conjunto de los números reales no negativos.

Solución.

El conjunto de los números reales no negativos esta formado por el conjunto con el elemento 0 más el conjunto de los números reales positivos.

Error Común

No incluir al conjunto con el elemento 0

EJERCICIO 4.

- ✓ Ordenar de mayor a menor los números -7 y -15.

Solución

$$-7 > -15 \text{ ya que } -7-(-15) = -7+15 = 8 \text{ (número positivo)}$$

Error Común
Dar como resultado $-15 > -7$ no respetando la definición de desigualdad

EJERCICIO 5.

- ✓ Calcular
  $(7x)^2$

Solución

$$(7x)^2 = 7 \cdot 7 \cdot x \cdot x = 49x^2$$

Error Común
Dar como resultado $7x^2$. El paréntesis indica que el exponente 2 se aplica a “7” y a “x”.

EJERCICIO 6.

- ✓ Calcular $\sqrt{25}$

Solución

$$\sqrt{25} = 5$$

Error Común
Dar como resultado ± 5 no respetando la definición de radicales.

EJERCICIO 7.

- ✓ Calcular

$$\left(\sqrt{(-5)^2}\right)$$

<u>Solución</u>

$$\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Error Común

Dar como resultado -5 simplificando el exponente de la potencia de la cantidad sub-radical con el índice de la raíz. Lo anterior es válido solamente cuando la base de la potencia de la cantidad sub-radical es un número no negativo.

EJERCICIO 8.

Racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

<u>Solución</u>

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{3\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Error Común

Racionalizar $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ multiplicando el numerador y el denominador por $\sqrt[3]{2}$

EJERCICIO 9.

Simplificar $-\left(5x^3 - 4x - 7\right)$

<u>Solución</u>

$$-\left(5x^3 - 4x - 7\right) = (-1)\left(5x^3 - 4x - 7\right) = (-1)\left(5x^3\right) + (-1)(-4x) + (-1)(-7)$$

$$= -5x^3 + 4x + 7$$

Error Común

Dar como resultado $-5x^2 - 4x - 7$.

No cambiar el signo de cada término del polinomio como lo indica la propiedad distributiva.

EJERCICIO 10.

Desarrollar $(x+y)^2$

Solución

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Error Común

Dar como resultado $x^2 + y^2$

No realizar el doble producto del primer término por el segundo término como lo indica la regla del cuadrado de un binomio.

EJERCICIO 11

Resolver $x(x-2)=0$

Solución

$$x(x-2)=0$$
$$x=0 \vee x-2=0$$
$$x=0 \vee x=2$$
$$\therefore S=\{0,2\}$$

Error Común

Dar como resultado $S=\{2\}$. No considerando el factor $x=0$.

EJERCICIO 12.

Resolver $2-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

Solución

$$2-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$
$$\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$
$$2x+2-1=x$$
$$2x-x=-1$$
$$x=-1$$

Sustituyendo en la ecuación original x por -1.

Obtenemos:

$$2+\frac{1}{-1+1}=\frac{-1}{-1+1}$$
$$2+\frac{1}{0}=\frac{-1}{0}$$

Ya que la división por 0 no existe, $x=-1$ no es solución de la ecuación original. La ecuación no tiene solución.

$$\therefore S=\varnothing$$

Error Común
Dar como resultado $x=-1$. Sin verificar la solución.

Ejercicio 13.

Resolver $12t^2 + 15t = 18$

<u>Solución</u>

$$12t^2 + 15t = 18$$
$$12t^2 + 15t - 18 = 0$$
$$3\left(4t^2 + 5t - 6\right) = 0$$
$$4t^2 + 5t - 6 = 0$$
$$\left(4t - 3\right)\left(t + 2\right) = 0$$
$$4t - 3 = 0 \vee t + 2 = 0$$
$$t = \tfrac{3}{4} \vee t = -2$$
$$\therefore S = \left\{-2, \tfrac{3}{4}\right\}$$

Error Común

$S = \left\{6, \tfrac{1}{4}\right\}$. Cuando se soluciona una ecuación cuadrática por factorización, se debe igualar la expresión a cero. No tiene ningún sentido factorizar $4t^2 + 5t = 6$ como $t\left(4t + 5\right) = 6$. Puesto que el lado derecho es 6 (no 0), no podemos concluir nada sobre t y $4t + 5$.

EJERCICIO 14.

Resolver para $x \in \mathbb{R}$
$-x > 7$

<u>Solución</u>

$-x > 7$ Multiplicamos ambos lados por (-1)
$x < -7$
$\therefore S = \left]-\infty, -7\right[$

Error Común
Dar como solución $x > -7$.
No invertir el sentido de la desigualdad como lo indica el teorema de desigualdades.

EJERCICIO 15

Si $\log(5) = 0{,}69897$ y $\log(6) = 0{,}77815$.

Calcular $\dfrac{\log(5)}{\log(6)}$.

<u>Solución</u>

$$\frac{\log(5)}{\log(6)} = \frac{0{,}69897}{0{,}77815} = 0{,}89825$$

Error Común
$\log(5) - \log(6) = 0{,}69897 - 0{,}77815 = -0{,}07918.$
Aplicación en forma incorrecta ley de un cociente de los logaritmos.

EJERCICIO 16.

Si $\log(5) = 0,69897$ y $\log(6) = 0,77815$.
Calcular $\log(5+6)$

<u>Solución</u>

$\log(5+6) = \log(11) = 1,04139$.

Error Común

$\log(5) + \log(6) = 1,47712$.

Aplicación en forma incorrecta ley del producto de logaritmos.

Capítulo 1. Números y Proporcionalidad

Medir y contar fueron probablemente las primeras actividades de tipo matemático que realizó el hombre. Debieron transcurrir muchos siglos para que el hombre obtuviera un concepto abstracto de número.

1.1 El Conjunto de los Números Naturales

El conjunto de los números naturales cuyos elementos son utilizados para contar, se representa por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$.

Desde el punto de vista del desarrollo de un sistema axiomático, consideraremos los conceptos "uno", "número natural" y "sucesor" como primitivos.
Los números naturales cumplen las siguientes propiedades:

a) uno (1) es el primer número natural.
b) Si n es un número natural, entonces su sucesor es $n+1$, también es un número natural.
c) uno no es sucesor de ningún otro número natural.
d) Si los sucesores de dos números naturales n y m son iguales, entonces los números naturales n y m son iguales.

Factores o Divisores y Múltiplos de un número

Si a, b y c son números naturales que cumplen la relación $c = a \cdot b$, entonces decimos que a y b son factores o divisores de c. En tal caso c será múltiplo de a y b.

Número Primo

Un número natural $p > 1$ es primo si y sólo si, sus únicos factores son exactamente p y 1.
El conjunto de los números primos es $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$

Número Compuesto

Un número $n > 1$ es compuesto si y sólo si ese número no es primo

Teorema

Todo número compuesto se puede descomponer de manera única como producto de números primos.

Ejemplo 1.

Descomponer el número 105 en sus factores primos.

Solución

Como 105 termina en 5, es divisible por 5. Luego $105 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$

Máximo Común Divisor

El máximo común divisor (m.c.d.) de un conjunto de números naturales es el mayor número que divide a cada uno de los números dados.

Ejemplo 2.

Determinar el m.c.d. entre 480 y 1200.

Solución

1. Descomponer cada número en sus factores primos.

$480 = 2 \cdot 240 = 2 \cdot 2 \cdot 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$

$1400 = 2 \cdot 700 = 2 \cdot 2 \cdot 350 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 175 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 \cdot 5^2$

2. Escoger los factores primos comunes con sus menores exponentes. 2^3 y 5
3. m.c.d.= $2^3 \cdot 5 = 40$

Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo (M.C.M.) de un conjunto de números naturales es el menor número natural que es múltiplo de cada uno de los números dados.

Ejemplo 3.

Determine el M.C.M. entre 4, 10 y 40.

Solución

1. Descomponemos cada número es sus factores primos.

   $4 = 2 \cdot 2$

   $10 = 2 \cdot 5$

   $40 = 2 \cdot 20 = 2 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2^2 \cdot 5$
2. Escoger los factores primos repetidos y no repetidos elevados a su mayor Exponente.

   $2, 2^2, 5$
3. M.C.M.= $2 \cdot 2^2 \cdot 5 = 40$

Número Par

Un número natural es par si y sólo si el múltiplo es 2.
Es decir, n es par $\Leftrightarrow n = 2p,\ p \in \mathbb{N}$
El conjunto de los números naturales pares es: $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

Número Impar

Un número natural es impar si y sólo si el no es par.
Es decir, n es impar $\Leftrightarrow n = 2p - 1,\ p \in \mathbb{N}$
El conjunto de los números naturales impares es: $O = \{1, 3, 5, ...\}$

Uso de Paréntesis y Signos de Agrupación

Los signos de agrupación se ocupan para dar prioridad a las operaciones que encierran. Los más frecuentes usados son: redondos $(\ \ )$, corchetes $[\ \ ]$ y llaves $\{\ \ \}$.

Operaciones indicadas con Signos de Agrupación

Si en una operación matemática aparecen uno o más signos de agrupación, se efectúan primero las operaciones encerradas dentro de dichos signos y luego las operaciones exteriores. Si hay paréntesis dentro de otros, se empiezan a resolver desde los paréntesis más interiores.

Ejemplo 4.

$$5 \cdot (4 + 7) = 5 \cdot 11 = 55$$

Operaciones indicadas sin Signos de Agrupación

Si en una operación matemática no aparecen signos de agrupación, se efectúan siempre primero las multiplicaciones y/o divisiones. Entre estas prevalece el orden de izquierda a derecha. Una vez resueltas todas las multiplicaciones y divisiones se resuelven sumas y restas, de izquierda a derecha.

Ejemplo 5.

$$15 \cdot 3 + 12 : 4 = (15 \cdot 3) + (12 : 4) = 45 + 3 = 48$$

1.2 El Conjunto de los Números Enteros.

El conjunto de los números enteros se representa por:
$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

- Es un conjunto infinito, ordenable.
- Si n es un número entero su antecesor es $n-1$ y su sucesor $n+1$.
- Si n es un número entero, los números pares son de la forma $2n$ y los impares son de la forma $2n-1$.
- Para el número entero par $2n$ su antecesor par es $2n-2$ y su sucesor par $2n+2$.
- Para el número entero impar $2n+1$ su antecesor impar es $2n-1$ y su sucesor impar $2n+3$.

Divisor y múltiplo de un número entero

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cumplen la relación: $c = a \cdot b$, entonces a y b son divisores de c, y c es múltiplo de a y de b.

<u>Ejemplo 6.</u>

-20 es múltiplo de -2 y 10, porque $-20 = (-2) \cdot 10$, y -2 y 10 son divisores de -20.

Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

M.C.M: El mínimo común múltiplo de un conjunto de enteros es el menor entero positivo que es múltiplo de cada uno de los números dados.
m.c.d.: El máximo común divisor de un conjunto de números enteros es el mayor entero positivo que divide a cada uno de los números del conjunto.

<u>Ejemplo 7.</u>

a) Encontrar M.C.M. de los números 12, 15 y 10.
b) Determinar el m.c.d. de los números 54 y 90.

<u>Solución</u>

a) Los múltiplos de 12 son: $0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132,$ etc…

- Los múltiplos de 15 son: $0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150,$ etc…
- Los múltiplos de 10 son: $0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130,$ etc…
- Los múltiplos comunes, distintos de cero, son: $60, 120,$ etc.

El menor de estos múltiplos comunes es 60; se dice que 60 es el mínimo común múltiplo de $12,\ 15$ y 10.

b) Los divisores distintos de la unidad de 54 son: $2, 3, 6, 9, 18, 27$ y 54.

- Los divisores distintos de la unidad de 90 son: $2, 3, 5, 6, 9, 15, 18, 30, 45$ y 90.
- Los divisores comunes, distintos de la unidad son: $2, 3, 6$ y 18. Por lo tanto, 18 es el máximo común divisor de los números dados.

Número par y número impar

Número par: n es par $\Leftrightarrow$ $n = 2p$, con $p \in \mathbb{Z}$
Número impar: n es impar $\Leftrightarrow$ $n = 2p - 1$, con $p \in \mathbb{Z}$

Ejemplo 8.

a) -14 es número par porque $-14 = 2 \cdot (-7)$, $-7 \in \mathbb{Z}$

b) -7 es impar porque $-7 = 2 \cdot (-3) - 1$, $-3 \in \mathbb{Z}$

Valor Absoluto

El valor absoluto de un número entero a se representa por $|a|$, y es un número no negativo que se define por:

$$|a| = \begin{cases} a, & si \quad a \geq 0 \\ -a, & si \quad a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto asigna a cada número entero un entero no negativo, que representa la distancia entre dicho entero y el cero, en la recta numérica.

Ejemplo 9.

$|14| = 14$

$|-17| = -(-17) = 17$

Operatoria en $\mathbb{Z}$

ADICIÓN

- Al sumar dos enteros de igual signo, se suman sus valores absolutos y se conserva el signo de los sumandos.
- Al sumar dos enteros de distinto signo, se restan los valores absolutos y se conserva el signo del sumando de mayor valor absoluto.

Ejemplo 10.

$(-15) + (-7) = -22$

$(-5) + (21) = 16$

MULTIPLICACIÓN

- El producto de enteros de igual signo, es positivo.
- El producto de enteros de distinto signo, es negativo.

Ejemplo 11.

$$(-3)\cdot(8)=-24$$
$$(-11)\cdot(-4)=44$$

Propiedades de la Adición y de la Multiplicación en $\mathbb{Z}$

1. Clausura
   $\forall a,b\in\mathbb{Z}:(a+b)\in\mathbb{Z}$
   $\forall a,b\in\mathbb{Z}:(a\cdot b)\in\mathbb{Z}$

2. Conmutatividad
   $\forall a,b\in\mathbb{Z}:a+b=b+a$
   $\forall a,b\in\mathbb{Z}:a\cdot b=b\cdot a$

3. Asociatividad
   $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}:(a+b)+c=a+(b+c)$
   $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}:(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

4. Elemento Neutro
   $\forall a\in\mathbb{Z},\exists 0\in\mathbb{Z}:a+0=0+a=a$
   $\forall a\in\mathbb{Z},\exists 1\in\mathbb{Z}:a\cdot 1=1\cdot a=a$

5. Elemento Inverso
   $\forall a\in\mathbb{Z},\exists(-a):a+(-a)=(-a)+a=0$

6. Distributividad
   $\forall a,b,c\in\mathbb{Z}:a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Otras Propiedades

1. Ley de Cancelación
   $a+b=a+c\Rightarrow b=c$
   $a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow b=c,a\neq 0$
2. $\forall a\in\mathbb{Z}:a\cdot 0=0$
3. $-(-a)=a$
4. $-a=-1\cdot a$
5. $\forall a\in\mathbb{Z}$, su inverso aditivo $-a$ es único
6. $a\cdot b=0\Leftrightarrow a=0\vee b=0$

Sustracción en $\mathbb{Z}$

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a-b = a+(-b)$$

Orden en $\mathbb{Z}$

$$\forall a,b \in \mathbb{Z} : a > b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z}^{+} : a = b+c$$

Potenciación de números enteros

Se llama potencia enésima de un número entero a siendo n un número natural, al producto de n factores iguales a a, siendo n un número natural.
En símbolos: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}$.

<u>**Ejemplo 12.**</u>

$$(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$$

Regla de los signos.
1. Toda potencia de exponente par es positiva 2. Toda potencia de exponente impar tiene el signo de la base.

<u>**Ejemplo 13.**</u>

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$$

$$(-2)^5 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -32$$

$$(-4)^0 = 1$$

Radicación de números enteros.

La raíz enésima de un número entero a que es potencia enésima, siendo n un número natural, es el número entero x tal que, elevado a la enésima potencia, da por resultado a.
En símbolos: $\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$

<u>**Ejemplo 14**</u>.

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$.

$\sqrt[5]{-32} = -2$ porque $(-2)^5 = -32$

Ejercicio 1.1

a) Efectúe las operaciones indicadas:

   a) $(-9)+(-2)+(-5)+(-1)$

   b) $5\cdot(8+5)\cdot 10$

   c) $5+7(3+10)$

b) Suprimir paréntesis, y encontrar el resultado en:

   a) $-4+(-2+1)+5-\left[3-(1-2)+4\right]+1-2$

   b) $-18+\left\{-2-\left[9-3+(-5-1)\right]+11\right\}-6$

   c) $-\left\{3-8-\left[4-3+(5+2-10)-(4-5)-3\right]+4-8\right\}+2$

c) Calcular:

   a) $-10\div(-2)+3\left[-1-(-2)^3-3\right]+(-1)^{10}-(-2)^2$

   b) $\sqrt[3]{-15+7}-(-2)\left[1-3^2+(-1)^3\right]+(-1)^0$

4. Exprese cada uno de los siguientes números como producto de potencias de números primos

   a) 216
   b) 1152
   c) 4800

5.

a) Determine el máximo común divisor (m.c.d.) entre 480, 1400 y 8000.

b) Determine el mínimo común múltiplo (M.C.M.) entre 25, 45 y 75.

6. Se tienen tres cubos de 84 cm^3, 270 cm^3 y 330 cm^3. ¿Cuál es el mayor volumen de cm^3 que cabe un número exacto de veces en cada uno de ellos?

7. Se tienen 160 cl y 168 cl de extractos distintos. Se quiere envasar en el menor número posible de frascos iguales sin mezclar los extractos. ¿Cuál es el número de frascos de cada clase?

8. Calcule el valor de:

   a) $(-2)^3-15\div(-3)+\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2^3}$

   b) $1-5(-3)+\sqrt[3]{-8}+(1-4)^3$

9. Calcular:

   a) $(x+5)(x-5)$

   b) $(a+y)(y-a)$

10.

a) Determine el valor de la expresión $a^2-2ab+b^2$. Si $a=10$ y $b=6$.

b) Determine el valor de la expresión $|a+b-c|+|2a-b-c|-|a|$. Si $a=-1, b=3, c=-2$.

Respuestas.

1.
   a) -17
   c) 1.2 650
   d) 1.3 96

2.
   a) -9
   b) -15
   c) 7

3.
   a) 14
   b) -19

4.
   a) $2^3 \cdot 3^3$
   b) $2^7 \cdot 3^2$
   c) $2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$

5.
   a) 5.1 40
   b) 5.2 225

6. 6 cm^3

7. 20 y 21

8.
   a) 1
   b) -13

9.
   a) x^2-25
   b) y^2-a^2

10.
   a) 16
   b) 6

1.3 El Conjunto de los Números Racionales

Este conjunto de números se representa por $\mathbb{Q}$.
Los números racionales pueden escribirse en forma de fracción.
Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}$ con $b, d \neq 0$. Diremos que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones equivalentes si y sólo si $ad = bc$.
El conjunto de todas las fracciones equivalentes a la fracción $\frac{a}{b}$ forman una clase de equivalencia que llamaremos número racional.

Se prefiere elegir como representante de la clase de equivalencia a una fracción cuyo numerador y denominador son primos entre si. Así al número racional

$$\left\{\frac{2}{3}, \frac{-2}{-3}, \frac{6}{9}, \frac{-10}{-15}, \ldots\right\} \text{ se le prefiere designar } \frac{2}{3}.$$

Para todas las fracciones a/b y c/d , con $b \neq 0$ y $d \neq 0$:

Regla de los signos

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cancelativa

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, c \neq 0$$

División de cero y división por cero

i) $0 \div a = \frac{0}{a} = a, a \neq 0$

ii) $0 \div 0 = \frac{0}{0}$ es indefinido

iii) $a \div 0 = \frac{a}{0}$ es indefinido, $a \neq 0$

La adición y la multiplicación satisfacen las propiedades de Clausura, Asociatividad, Conmutatividad, Elemento Neutro (0 para la adición, 1 para la multiplicación), Elemento Inverso ($\forall\, a/b \in \mathbb{Q}$, $(-a/b)$ inverso aditivo y b/a inverso multiplicativo) y, Distributividad de la multiplicación sobre la adición.

Amplificación y Simplificación

- La amplificación y la simplificación son procesos para determinar fracciones equivalentes.
- Para amplificar una fracción se multiplica el numerador y el denominador por un mismo entero, distinto de cero.
- Para simplificar una fracción se divide el numerador y el denominador por un mismo entero, distinto de cero y de uno.

Ejemplo 15.

a) $\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 2}=\frac{10}{14}$

b) $\frac{6}{36}=\frac{6:2}{36:2}=\frac{3}{18}=\frac{3:3}{18:3}=\frac{1}{6}$

Las fracciones que no se pueden simplificar, se denominan fracciones irreductibles.

Forma Decimal de un Número Racional

Para escribir un número racional en forma decimal se divide el numerador por el denominador.
Todo número racional es posible escribirlo como número decimal finito, infinito periódico o infinito semiperiódico.

Ejemplo 16.

$a)\ \frac{3}{4}=0,75$

$b)\ \frac{4}{9}=0,44444...=0,\bar{4}$

$c)\ \frac{5}{6}=0,8333...=0,8\bar{3}$

Orden en $\mathbb{Q}$

Los números racionales es un conjunto infinito y ordenable. Para determinar cual de dos racionales es el mayor, se recomienda igualar los numeradores mediante una amplificación y comparar las fracciones resultantes. Si los numeradores son iguales, la fracción menor es la de mayor denominador. Si los denominadores son iguales la mayor es la de mayor numerador.

Ejemplo 17.

$a)\ \frac{5}{7}>\frac{5}{12}$

$b)\ \frac{15}{11}>\frac{5}{11}$

Operaciones en $\mathbb{Q}$

Adición:

$$\forall \frac{a}{b},\frac{c}{d}\in \mathbb{Q}\ :\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Multiplicación:

$$\forall \frac{a}{b},\frac{c}{d}\in \mathbb{Q}\ :\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Sustracción:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} : \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

División:

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, \left(\frac{c}{d} \neq 0\right) \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

<u>**Ejemplo 18**</u>.

Calcular

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2}}{3\frac{2}{3} - 2\frac{3}{2}}$$

<u>Solución</u>

$$\frac{\frac{3-8+30}{12}}{\frac{11}{3} - \frac{7}{2}} = \frac{\frac{25}{12}}{\frac{22-21}{6}} = \frac{\frac{25}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{25}{12} \cdot \frac{6}{1} = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{25}{2}$$

Números Mixtos

Un número que consta de entero y fracción es un número mixto y es equivalente a la suma del entero y la fracción.

Transformación de Decimal a Fracción

La transformación de un número decimal a fracción depende del tipo de decimal que se quiera transformar:

1. Decimal Finito
Se escribe en el numerador la parte decimal, en el denominador un uno acompañado de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

<u>**Ejemplo 19.**</u>

$$0,75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

2. Decimal Infinito Periódico
Se escribe en el numerador la parte decimal y, en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

<u>**Ejemplo 20.**</u>

$$0,\bar{7} = \frac{7}{9}$$

3. Decimal Infinito Semiperiódico

Se escribe en el numerador el resultado de la resta entre la parte decimal y el ante-período y, en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período y seguido de tantos 0 como cifras tenga el ante-período.

__Ejemplo 21__.

$$0,1\overline{23} = \frac{123-1}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}$$

Ejercicio 1.2

1. Simplifique:

a) $\dfrac{84}{105}$

b) $\dfrac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5^2}$

2. Escriba en orden descendente (de mayor a menor) $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{12}$.

3. Escriba en orden ascendente (de menor a mayor) $\dfrac{21}{4}, \dfrac{132}{25}, \dfrac{262}{50}, \dfrac{526}{100}$.

4. Calcule:

a) $\dfrac{1}{10} + \dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{50}$ b) $\dfrac{-9}{7} \cdot \dfrac{3}{5}$ c) $\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{7}$

5. Calcule

a) $\left(\dfrac{2}{3}\right) : \left(-\dfrac{5}{9}\right)$ b) $\dfrac{(-4)^3}{(-4)^5}$ c) $4\dfrac{1}{3} + 5\dfrac{1}{4}$

6. Calcule:

a) $\left(1 + \dfrac{9}{10}\right) - \left(1 - \dfrac{9}{10}\right)$

b) $2\dfrac{3}{5} + 3\dfrac{4}{5} - 5\dfrac{1}{3}$ c) $\left(2 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(2 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(3 - \dfrac{1}{4}\right)$

7. Efectúe la operación indicada y simplifique el resultado:

a) $\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{5}{12}\right) - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right)\right\}$ c) $\left(\dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{15}\right) \div \left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3}\right)$

8.Encuentre la representación decimal de las siguientes fracciones y determine si tienen una representación finita:

a) $\frac{127}{1000}$
b) $\frac{27}{11}$
c) $\frac{19}{6}$

9. Escriba la fracción común que corresponde a cada uno de los siguientes decimales:

a) $0,27$
b) $3,205$
c) $0,\overline{36}$

10. Escriba la fracción común que corresponde al decimal semiperiódico $1,9\overline{45}$

Respuestas

1. a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{6}{5}$

2. $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}$

3. $\frac{262}{50}, \frac{21}{4}, \frac{526}{100}, \frac{132}{25}$

4. a) $\frac{36}{25}$ b) $-\frac{27}{35}$ c) $\frac{23}{28}$

5. a) $-\frac{6}{5}$ b) $\frac{1}{16}$ c) $9\frac{7}{12}$

6. a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{16}{15}$ c) $\frac{27}{4}$

7. a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{43}{64}$ c) $\frac{1}{13}$

8. a) 0,127 (finito) b) $2,\overline{45}$ c) $3,1\overline{6}$

9 a) $\frac{27}{100}$ b) $\frac{641}{200}$ c) $\frac{4}{11}$

10. $\frac{107}{55}$

1.4 Razón

Una razón es una comparación de dos cantidades de la misma naturaleza, por medio de un cociente (cuociente). Por ejemplo. Si una madre tiene 42 años y su hija tiene 17 años, entonces el cociente entre la edad de la madre y de la hija es $\frac{42}{17}$. Se dice que la razón entre la edad de la madre y la de la hija es como 42 es a 17.

La razón $\frac{a}{b}$ o $a \div b$ se lee "a es a b".

El primer elemento de una razón (numerador o dividendo) se llama **antecedente** y el segundo término (denominador o divisor) se llama **consecuente**.

1.5 Proporción

La igualdad entre dos razones se llama proporción. Así: $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ es una proporción.

También podemos escribirla $2:5 = 14:35$. Los términos 2 y 35 se llaman extremos y 5 y 14 medios.

Propiedades de las Proporciones

1. Propiedad Fundamental.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \text{ con } b, d \neq 0$$

2. Invertir Razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

3. Intercambiar Extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

4. Intercambiar Medios

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

5. Permutar Razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

Ejemplo 23.

Calcular x en la siguiente proporción: $\dfrac{22}{x} = \dfrac{6}{3}$

<u>Solución</u>

De acuerdo con la propiedad fundamental:

$$x \cdot 6 = 22 \cdot 3$$

$$6x = 66$$

$$x = \frac{66}{6}$$

$$x = 11$$

Es decir x es 11.

Proporciones Iteradas

Una proporción iterada también llamada serie de razones consta de tres o más razones que tienen el mismo valor. Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \quad \text{o} \quad a:c:e = b:d:f$$

Teorema Fundamental

En una proporción iterada cualquiera, se cumple que la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como un antecedente cualquiera es a su consecuente respectivo.
Es decir:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}, \text{ entonces } \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Para resolver problemas relacionados con proporciones iteradas, igualamos cada una de las razones a una constante k:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{ y despejando obtenemos: } a = kb,\ c = kd \text{ y } e = kf.$$

Ejemplo 24.

Las edades de María, Juana y Alejandra son entre sí como $3:4:5$. Si sus edades suman 60, calcular la edad de Alejandra.

<u>Solución</u>

Sean x, y, z las edades de María, Juana y Alejandra respectivamente. Se tiene:

$\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{5} = k$ y $x + y + z = 60$. Despejando tenemos: $x = 3k; y = 4k; z = 5k$.

Como $x + y + z = 60$, tenemos:

$$3k+4k+5k=60$$
$$12k=60$$
$$k=5$$

Reemplazando el valor de k, en $z=5k$, obtenemos: $z=5\cdot 5=25$.
Respuesta: Alejandra tiene 25 años.

Proporcionalidad Directa

Dos variables están en proporcionalidad directa si la razón entre ellos permanece siempre constante.

Diremos que x es directamente proporcional a y, si el cociente $\frac{x}{y}$ permanece constante.

En símbolos: $\frac{x}{y}=k$ (k factor de proporcionalidad).

Es decir, a medida que aumenta o disminuye una, la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

Ejemplo 25.

En un edificio de departamento ubicado en la ciudad de Concepción, una familia gasta en promedio 300 litros de agua por día. ¿Para cuántas familias alcanzará una provisión de 9000 litros diarios?

Solución

Como es un caso de proporcionalidad directa, tenemos:

$$\frac{1\,\text{familia}}{300\,\text{litros}}=\frac{x\,\text{familia}}{9000\,\text{litros}}$$

Igualando el producto de términos cruzados:

$$300x=9000$$
$$x=\frac{9000}{300}$$
$$x=30$$

Respuesta: la provisión de 9000 litros alcanza para 30 familias.

Proporcionalidad Inversa

Dos variables están en proporcionalidad inversa si a medida que aumenta una la otra disminuye proporcionalmente.
Si x e y son variables en proporcionalidad inversa, se tiene: $x \cdot y = k$ (k= constante de proporcionalidad).

Ejemplo 26.

Si un auto viaja en una dirección durante 4 horas a un velocidad de 100 kilómetros por hora, ¿cuántas horas utilizará en el regreso si viaja a una velocidad de 80 kilómetros por hora?

<u>Solución</u>

Como las cantidades son inversamente proporcionales, tenemos:

$$\frac{100\left[{}^{\text{Km}}\!/_{\text{h}}\right]}{80\left[{}^{\text{Km}}\!/_{\text{h}}\right]} = \frac{x\,\text{horas}}{4\,\text{horas}}$$

Como las unidades son homogéneas, se tiene:

$$\frac{100}{80} = \frac{x}{4}$$

$$80x = 400$$

$$x = \frac{400}{80}$$

$$x = 5$$

Respuesta: El viaje de regreso demora 5 horas.

1.6 Porcentajes

Los números fraccionarios o decimales algunas veces se expresan como porcentajes; por ejemplo 7% quiere decir $7/100$ ó $0,07$. En general, a % significa "a partes de 100", y es, simplemente, otra forma de escribir $a/100$.
Por ejemplo 32 % significa $32/100$: entonces, 32 % = 0,32.

Ejemplo 27.

$$0,45 = 0,45 \times 1 = 0,45 \times 100\% = 45\%$$

Los porcentajes se utilizan preferentemente para describir los incrementos o reducciones en cantidades como población, salarios y precios.

El porcentaje de incremento = (cantidad de aumento / cantidad original) $\times 100\,\%$
El porcentaje de decrecimiento = (cantidad de decrecimiento / cantidad original)$\times 100\,\%$

Ejemplo 28.

La población de un pueblo disminuyó de 72.500 a 70.000 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de decrecimiento?

Solución

La cantidad de decrecimiento es $72.500-70.000=2500$ y la cantidad original es 72.500. Utilizando la fórmula del porcentaje de decrecimiento, se tiene: $\frac{2500}{72500}\approx 3,44827586207\times 100\%\approx 3,45\%$.

Respuesta: El porcentaje de decrecimiento es aproximadamente de $3,45\%$.

Ejemplo 29.

¿Cuál es el precio de oferta de una pelota de fútbol si el precio normal es de \$ 6.000 y hay un 25 % de descuento?

Solución

Como se ofrece un 25 % de descuento, el precio de oferta será, el 75 % del precio normal, es decir:

$$(0,75)(\$6.000)=\$4.500.$$

Otra forma, podemos calcular 25 % de descuento y restarlo al precio normal así:

$$\$6.000-(0,25)(\$6.000)=\$6.000-\$1.500=\$4.500$$

Ejercicio 1.3

1. Determine la razón entre:
   a) -12 y 18
   b) -5 y $\frac{1}{5}$
   c) $\sqrt{2}$ y $\sqrt{32}$

2. Encontrar x, si:
   a) $3:4=x:12$.
   b) $\dfrac{x}{-\frac{5}{4}}=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}}$
   c) $\dfrac{\frac{8}{3}+x}{x}=\dfrac{7}{3}$

3. Comprobar si los siguientes números forman una proporción:

a) $\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{1}{9};\frac{1}{4}$

b) $8;4;4;3$

c) $\frac{5}{8};-0,5;-0,5;\frac{2}{5}$

4. Calcular el extremo desconocido en las siguientes proporciones:

a) $\dfrac{x}{0,3-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{1}{6}-0,5}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}$

b) $\dfrac{\frac{1}{4}-1}{-0,5-\sqrt{\frac{1}{16}}}=\dfrac{-0,5-\sqrt{\frac{1}{16}}}{x}$

c) $\dfrac{\left(1-\frac{4}{5}\div 2\right)^2}{\sqrt{1-0,09}}=\dfrac{\sqrt{1-0,09}}{x}$

5. Dos números, cuya suma es 28, están en la relación $\frac{3}{4}$. ¿Cuáles son los números?

6. La suma de los cuadrados de dos números positivos es 25. Si la razón entre ellos es $\frac{2}{1,5}$. ¿Cuáles son los números?

7. En un día de trabajo de 8 horas, un trabajador hace 10 cajas. ¿Cuántas horas tardará en hacer 25 de esas mismas cajas?

8. Para empapelar una habitación se necesitan 15 rollos de papel de 0,45 m de ancho. ¿Cuántos rollos se necesitarán, si el ancho fuera de 0,75 m ?

9. Sobre un total de 25 alumnos concurren 22 a clase. ¿Cuál es el porcentaje de asistencia y de inasistencia?

10. En una fábrica de 1860 trabajadores la asistencia durante 3 días consecutivos ha sido de 1850, 1852, 1848. ¿Cuál es el porcentaje medio de asistencia e inasistencia?

Respuestas

1. a) $-\dfrac{2}{3}$ b) -25 c) $\dfrac{1}{4}$

2. a) $x=9$ b) $x=-10$ c) $x=2$

3. a) Si b) No c) Si

4. a) $x=\dfrac{3}{5}$ b) $x=-\dfrac{3}{4}$ c) $x=\dfrac{91}{36}$

5. 12 y 16
6. 3 y 4.
7. 20 horas.
8. 9 rollos
9. 88 % y 12% respectivamente.
10. 99,46% y 0,54% respectivamente.

1.7 El Conjunto de los Números Irracionales

El conjunto de los números irracionales se representa por $\prod$.
Los números irracionales son números de infinitas cifras decimales que no tienen ninguna ley de formación, es decir, no son expresiones periódicas, por lo tanto no pueden expresarse mediante una fracción, y en consecuencia no son números racionales; por eso es que se los llama números irracionales. Para expresarlos, se escriben las primeras cifras decimales conocidas y luego se agregan puntos suspensivos, con lo que se indica que el número de cifras es infinito.

Ejemplo 22.

$a)\sqrt{3}=1,73...$

$b)\sqrt{23}=4,795...$

$c)\pi=3,141592653589...$

$d)e=2,71828182846...$

1.8 Conjunto de Números Reales

La unión del conjunto de los números racionales y el de los números irracionales es el conjunto de los números reales. Si este conjunto se denota por $\mathbb{R}$, simbólicamente se define por medio de $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \Pi$.

El sistema numérico real consta del conjunto $\mathbb{R}$ de números reales y dos operaciones denominadas adición y multiplicación. La adición se denota por medio del símbolo +, y la multiplicación por el símbolo $\cdot$ (o bien, $\times$). Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a+b$ denota la suma, y $a \cdot b$ (o bien ab) denota su producto.

Propiedades del sistema de números reales

ADICIÓN

1. Clausura

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b \in \mathbb{R}$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \in \mathbb{R}$$

2. Asociativa

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a+(b+c) = (a+b)+c$$

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3. Conmutativa

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a+b = b+a$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$$

4. Elemento Neutro

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 0 \in \mathbb{R} : a+0 = 0+a = a$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

5. Elemento Inverso

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R} : a+(-a) = 0 = (-a)+a = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R}, (a \neq 0) : a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a = 1$$

6. Distributividad

6.1 $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a(b+c) = ab+ac$

6.2 $\forall a,b,c \in \mathbb{R} : (a+b)c = ac+bc$

7. Cancelativa

7.1 $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$: Si $a+c = b+c$, entonces $a=b$

7.2 $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$: Si $ac = bc$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

8. Multiplicación por cero

8.1 $\forall a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

8.2 $\forall a,b \in \mathbb{R}$: Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0 \vee b = 0$ (o ambas)

SUSTRACCIÓN

La sustracción de dos números reales a y b se define en términos de la adición como:

$a-b=d$ si y sólo si $a=b+d$.

Sustracción y negativos

- $-(-a)=a$
- $-(ab)=(-a)(b)=a(-b)$
- $-a=-1(a)$
- $(-a)(-b)=ab$

Ejemplo 30.

Evaluar la siguiente expresión: $(-a)(-b)$.

<u>Solución</u>

$(-a)(-b)=ab$

DIVISIÓN

La división de dos números reales a y b se define en términos de la multiplicación de la siguiente forma:

$a \div b=q$ si y sólo si $a=bq$.

Debido a que $0 \cdot q=0$ para cualquier valor de q, $0 \div 0$ puede ser igual a cualquier número real, de aquí $0 \div 0$ es indeterminado. Por tanto, para cualquier número real a, no existe un significado fijo para $a \div 0$. Luego la división entre cero no está definida.

Ejemplo 31.

Evaluar la siguiente expresión: $\dfrac{v}{7-(15-8)}$

<u>Solución</u>

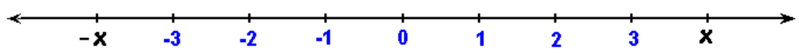
$$\frac{v}{7-(15-8)}=\frac{v}{7-7}=\frac{v}{0}$$

Luego,

$\dfrac{v}{7-(15-8)}$ es indefinida, porque su denominador es cero.

RECTA DE NÚMEROS REALES

Sea cualquier recta, escogemos un punto sobre ella para representar el número 0. Este punto, en particular, se llama origen. Si a continuación seleccionamos un segmento de recta de longitud unitaria, como lo muestra la siguiente figura,



cada número real positivo x puede representarse por un punto a una distancia x a la derecha del origen. De igual manera, cada número real negativo $-x$ puede representarse con un punto a una distancia x hacia la izquierda del origen. Esta asociación produce una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de una recta. Para cualquier punto P dado en la recta de números reales, el número p, que corresponde a este punto se llama coordenada de P.

Menor que y Mayor que

Si a y b son números reales, $a \neq b$ se tiene:

- $a < b$ si y sólo si $b - a$ es un número positivo
- $a > b$ si y sólo si $a - b$ es un número positivo

Ejemplo 32.

- $7 > 5$ porque $7 - 5 = 2$, y 2 es positivo
- $-12 < -5$ porque $-5 - (-12) = 7$, y 7 es positivo.

Si escribimos $a \leq b$ (léase a es menor o igual a b) se quiere decir que a es menor que b o $a = b$.
De manera similar, $a \geq b$ (léase a es mayor o igual a b) indica que a es mayor que b o $a = b$.

Los enunciados $a < b, a > b, a \leq b$ y $a \geq b$ son llamados **desigualdades**. Las dos primeras son desigualdades estrictas y las dos últimas son desigualdades no estrictas.

Un número x está entre a y b si $a < x$ y $x < b$. Se puede escribir lo anterior como una desigualdad continua de la forma siguiente: $a < x < b$. Otras desigualdades continuas son $a \leq x \leq b, a \leq x < b$ y $a < x \leq b$.

Al conjunto de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad continua $a < x < b$ se le denomina intervalo abierto y se denota por $]a,b[$. Por tanto, $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
El intervalo cerrado es el intervalo abierto $]a,b[$ junto con los dos puntos extremos a y b, se denota por $[a,b]$; así $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

El intervalo abierto por la izquierda (semiabierto) es el intervalo abierto $]a,b[$ junto con el punto extremo derecho b. Se denota por $]a,b]$; así $]a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\leq b\}$.
El intervalo abierto por la derecha (semiabierto) es el intervalo abierto $]a,b[$ junto con el punto extremo izquierdo a y se denota por $[a,b[$. De este modo $[a,b[=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\}$.

Empleando el símbolo $+\infty$ y el símbolo $-\infty$. Se tienen los intervalos siguientes:

$$]a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$$
$$]-\infty,b[=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$$
$$[a,+\infty[=\{x\in\mathbb{R}: x\geq a\}$$
$$]-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}: x\leq b\}$$
$$]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$$

Ejemplo 33.

Escribir en notación de intervalos los siguientes conjuntos:

a) $\{x\in\mathbb{R}: -12\leq x<-5\}$

b) $\{x\in\mathbb{R}: x>5 \text{ y } x<17\}$

c) $\{x\in\mathbb{R}: x<0\}\cup\{x\in\mathbb{R}: x\geq 6\}$

Solución

a) $\{x\in\mathbb{R}: -12\leq x<-5\}=[-12,-5[$

b) $\{x\in\mathbb{R}: x>5 \text{ y } x<17\}=]5,17[$

c) $\{x\in\mathbb{R}: x<0\}\cup\{x\in\mathbb{R}: x\geq 6\}=]-\infty,0[\cup[6,+\infty[$

Valor Absoluto

Si a es un número real, el valor absoluto de a, denotado por $|a|$, es a, si a es no negativo, y $-a$, si a es negativo. Con símbolos se tiene

$$|a|=\begin{cases} a & si \quad a\geq 0 \\ -a & si \quad a<0 \end{cases}$$

El valor absoluto de un número real a se puede considerar su distancia (sin tener en cuenta el sentido, a la izquierda o a la derecha) desde el origen.

Ejemplo 34

Encontrar

a) $\left|\dfrac{17}{7}\right|$

b) $\left|\sqrt{2}-3\right|$

Solución

a) $\left|\frac{17}{7}\right| = \frac{17}{7}$, ya que $\frac{17}{7}$ es un número positivo

b) $\left|\sqrt{2}-3\right| = -\left(\sqrt{2}-3\right) = -\sqrt{2}+3 = 3-\sqrt{2}$, ya que $\left(\sqrt{2}-3\right)$ es un número negativo.

Distancia entre dos puntos

Si a y b son dos puntos en la recta numérica, la distancia de a a b es $d(a,b) = |b-a|$.

Ejemplo 35.

Calcular la distancia de -17 a 2.

Solución

$d(-17,2) = |2-(-17)| = |2+17| = 19$ unidades

Ejercicio 1.4

1. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x}{\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\right)}$

b) $y\left(\frac{0}{9}\right)$

c) $\dfrac{w}{13-(21-8)}$

2. Encuentre la expresión dada:

a) $\dfrac{-(-v)}{-vm}$ b) $\dfrac{8(7+w)}{16w}$

3. Justifique los siguientes enunciados:

a) $[(6)(7)](3) = [(7)(6)](3)$

b) $(a-b)+[-(a-b)] = 0$

c) $(4+5)(7+2) = (4+5)7+(4+5)2$

4. Represente los siguientes conjuntos mediante la notación de intervalos:

a) $\{x \in \mathbb{R} : -15 \le x \le 7\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$

5. Utilice notación de intervalos para denotar los siguientes conjuntos.
   a) El conjuntos de todos los x en los reales tales que x menor o igual a -12.
   b) El conjuntos de todos los x en los reales tales que x es mayor o igual a 5 y menor que 17.

6. Represente el conjunto mediante la notación de intervalos:
   a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 15\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -5\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

7. Determine el valor absoluto de:
   a) $|15|$
   b) $\left|-\frac{5}{7}\right|$
   c) $|\pi - 3|$

8. Escriba la expresión sin utilizar valor absoluto:
   a) $|x-3|$, si $x > 3$
   b) $|x-y|-|y-x|$
   c) $|3v-w|$, $3v < w$

9. ¿Para qué valores de x es verdad que $x = |x|$?

10. Determine la distancia entre los puntos dados:
   a) $-7, -9$
   b) $\frac{7}{2}, \frac{-7}{2}$

Respuestas

1. a) $\frac{20x}{19}$ b) 0 c) Indefinida

2. a) $\frac{-1}{m}$, $v \neq 0$ b) $\frac{7+w}{2w}$

3. a) Conmutativa (producto) b) Inverso aditivo c) Distributiva

4. a) $[-15, 7]$ b) $]4, +\infty[$

5. a) $]-\infty, -12]$ b) $[5, 17[$

6. a) b) $]-\infty,-5]\cup]5,+\infty[$

7. a) 15 b) $\frac{5}{7}$ c) $\pi-3$

8. a) $x-3$ b) 0 c) $w-3v$

9. $x\geq 0$

10. a) 2 b) 7

1.9 Potenciación

Exponentes enteros

En general, para cualquier número real a y para cualquier entero positivo n, el símbolo a^n, representa el producto de n factores de a.
Es decir,

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}}.$$

En la expresión a^n, n se denomina exponente ó potencia de a y a se denomina base.

Ejemplo 36.

$$4^3 = 4\cdot 4\cdot 4 = 64$$

También, para cualquier entero positivo n, definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a\neq 0$

Ejemplo 37.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

Además, para cualquier base $a\neq 0$, definimos

$$a^0 = 1$$

Ejemplo 38.

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^0 = 1$$

Ejemplo 39.

$$2x^4 = 2\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x$$

LEYES DE LOS EXPONENTES

Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $m,n \in \mathbb{Z}$. Entonces,

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
- $\left(ab\right)^n = a^n b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Dado que cada expresión representa un número real.

Ejemplo 40.

$$\left(2x\right)^4 = 2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot 2x = 16x^4$$

Ejemplo 41.

$$\frac{x^{-7}}{x^{-4}} = x^{-7-(-4)} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

1.10 Notación Científica

Los exponentes enteros con frecuencia se utilizan para escribir números muy grandes o muy pequeños en una forma más conveniente.
Cualquier número real positivo se puede escribir en notación científica usando la forma

$a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero.

Ejemplo 42.

Expresar en notación científica los siguientes números: 4.000.000 y 0,00000004.

<u>Solución</u>

$4.000.000 = 4 \times 10^6$

$0{,}00000004 = 4 \times 10^{-8}$

Ejemplo 43.

Calcular el valor de $\dfrac{(400)^3(10.000.000)}{(2.000.000)^4}$

<u>Solución</u>

$$\frac{(400)^3(10.000.000)}{(2.000.000)^4}=\frac{\left(4\times10^2\right)^3\left(1\times10^7\right)}{\left(2\times10^6\right)^4}=\frac{\left(4^3\right)\left(10^2\right)^3\left(10^7\right)}{\left(2^4\right)\left(10^6\right)^4}=\frac{64\left(10^6\right)\left(10^7\right)}{16\left(10^{24}\right)}$$

$$=\frac{64\left(10^{13}\right)}{16\left(10^{24}\right)}=4\times10^{13-24}=4\times10^{-11}=0,00000000004$$

DÍGITOS SIGNIFICATIVOS

En el mundo real la mayoría de las aplicaciones incluyen medidas que están sujetas a error y, en consecuencia, se consideran aproximaciones.
Supongamos que el resultado de una medida se expresa en notación científica $x=a\times10^n$, con $1\leq a<10$ y se sabe que los dígitos de a son exactos (excepto, posiblemente, el último dígito, el cual puede ser aproximado si el número fue redondeado).
Si a contiene k lugares decimales, entonces se dice que x tiene $k+1$ dígitos significativos.

Ejemplo 44.

$2{,}1975\times10^{19}$. Según la convención anterior tiene cinco dígitos significativos.

Ejercicio 1.5

1. Escriba como potencia de un número:
   - a) $4\cdot\left(4^3\right)^5$
   - b) $\left((-3)^7\right)^6$
   - c) $125^2\cdot25^4$
2. Escriba como potencia de un número:
   - a) $(-7)(-7)(-7)(-7)(-7)$
   - b) $(-3)^9\cdot(3)^4$
   - c) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2$

3. Use las leyes de exponentes para simplificar cada expresión:

a) $\dfrac{(-5)^8}{5^4}$

b) $\dfrac{7^3 \cdot 7^8}{7^{12}}$

c) $\dfrac{15^3}{5^4 \cdot 6^3}$

4. Simplifique y escriba el resultado con exponentes positivos:

a) $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^0 (2)^2 (2)^{-3}$

b) $\dfrac{9^3}{9^{-6}}$

c) $\left(3^{-1}+3\right)^2$

5. Simplifique cada expresión y escriba el resultado sin exponentes negativos:

a) $5^{-3} \cdot 5^{-1}$

b) $\dfrac{2^{-1}+2^{-2}}{2^{-1} \cdot 2^{-2}}$

c) $\dfrac{\left(3^{-1}+3^{-2}\right)^0}{3^{-1}+3^{-2}}$

6. Escriba los siguientes números usando notación científica:

a) 58.700
b) 50.000.000
c) $0,00007$

7. Calcular usando notación científica:

a) $\left(4\times 10^8\right)\left(1,3\times 10^5\right)\left(10^6\right)$

b) $\left(3\times 10^{-4}\right)\left(5\times 10^8\right)\left(10^{-3}\right)$

c) $0,2^6 \times 400 \times 0,015^2$

8. Calcular usando notación científica:

a) $\dfrac{3,27\times 10^{15}}{6\times 10^{-4}}$

b) $\dfrac{\left(2,04\times 10^{-5}\right)\left(8\times 10^{-3}\right)}{\left(1,7\times 10^{-4}\right)\left(10^{-6}\right)}$

c) $\dfrac{\left(3\times 10^9\right)\left(2,8\times 10^7\right)}{\left(2\times 10^5\right)\left(1,2\times 10^6\right)}$

9. De una pieza de género se han vendido 15,75 m; 8,50 m y finalmente 22,60 m, quedando aún 32,15 m. ¿Cuántos metros tenía la pieza?

10. El diámetro de una molécula de hidrógeno es de $5{,}8\cdot 10^{-8}$ cm. Si fuese posible Disponer consecutivamente en fila 200000000 de estas moléculas. ¿Qué largo tendría la fila?

Respuestas

1.	a) 4^{16}	b) 3^{42}	c) 5^{14}
2.	a) -7^{5}	b) -3^{13}	c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{7}$
3.	a) 625	b) $\frac{1}{7}$	c) $\frac{1}{40}$
4.	a) $\frac{1}{2}$	b) 9^{9}	c) $\frac{100}{9}$
5.	a) $\frac{1}{625}$	b) 6	c) $\frac{9}{4}$
6.	a) $5{,}87\times 10^{4}$	b) 5×10^{7}	c) 7×10^{-5}
7.	a) $5{,}2\times 10^{19}$	b) $1{,}5\times 10^{2}$	c) $5{,}76\times 10^{-6}$
8.	a) $5{,}45\times 10^{18}$	b) $9{,}6\times 10^{2}$	c) $3{,}5\times 10^{5}$
9.	79 m		
10.	11,6 cm.		

1.11 Radicación

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Ejemplo 45.

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \text{, ya que } (-5)^3 = -125$$

Ejemplo 46.

$$\sqrt[4]{\frac{81}{256}} = \frac{3}{4} \text{, ya que } \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$$

LEYES DE LOS RADICALES

Sean m y n enteros positivos y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces,

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
- $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & si \quad n \quad impar \\ |a| & si \quad n \quad par \end{cases}$
- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[nk]{a}\right)^{mk}$ con $k \in \mathbb{N}$
- $\left(\sqrt[nk]{a}\right)^{mk} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ con $k \in \mathbb{N}$

Siempre y cuando los radicales representen números reales.

RAÍCES CUADRADA

$$\sqrt{a} = b \text{ si y solo } \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$$

Ejemplo 47.

Calcular

1) $\sqrt{36} = 6$, pues $36 \geq 0,\ \ 6 \geq 0$ y $6^2 = 36$.

2) $\sqrt{-7}$ no tiene solución en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 48.

Simplificar

1) $\sqrt{\dfrac{s^2}{49}} = \dfrac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{49}} = \dfrac{|s|}{7}$

2) $\left(\sqrt[7]{r}\,\sqrt[7]{s}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{rs}\right)^7 = rs$

RACIONALIZACIÓN DE RADICALES

Al quitar los radicales del numerador o del denominador de un fraccionario, decimos que estamos racionalizando. El procedimiento de racionalización implica la multiplicación del fraccionario por 1, escrito en forma especial.

Ejemplo 49.

Racionalizar el denominador de la expresión $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

<u>Solución</u>

Multiplicamos la expresión dada por $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

Así, $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$

POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL

Para cualquier número real a y para cualquier entero positivo n, definimos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ dado que $\sqrt[n]{a}$ sea un número real.

Además, definimos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ para cualquier entero m tal que $\dfrac{m}{n}$ sea la mínima expresión.

Ejemplo 50.

$$16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^{3} = 4^{3} = 64$$

LEYES DEL EXPONENTES RACIONAL

Las leyes de los exponentes enteros dadas anteriormente, también son validas para los exponentes racionales.

Ejemplo 51.

$$\left(x^{2}y^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(x^{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(y^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{-8}{4}} = x^{\frac{1}{2}}y^{-2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{2}}$$

Observación

Si $a<0$, para ciertos valores de m y n, $\left(a^{m}\right)^{n} \neq a^{mn}$

Ejemplo 52

$$\left[(-9)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} = (81)^{\frac{1}{2}} = 9 \quad \text{y} \quad (-9)^{2\left(\frac{1}{2}\right)} = (-9)^{1} = -9$$

Por tanto, $\left[(-9)^{2}\right]^{1/2} \neq (-9)^{2(1/2)}$

Ejercicio 1.6

1. Calcule $\sqrt[3]{(-a)^{6}}$, con $a \in \mathbb{R}$.
2. Calcule $(27)^{-1/3}$
3. Encontrar el valor de $\dfrac{81^{0,25}+9^{-0,5}}{(-27)^{1/3}+(-8)^{2/3}}$
4. Encontrar el valor de $\left(\dfrac{8x^{-27}}{27^{-1}y^{6}}\right)^{-1/3}$
5. Efectuar las operaciones indicadas, expresando el resultado con exponentes racionales:

a) $\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)\left(a^{1/2}-b^{1/2}\right)$

b) $\dfrac{x^{9/2}-2x^{7/2}-5x^{5/2}+2x^{1/2}}{x^{2}-4x+2}$

6. Simplificar

a) $\sqrt[4]{625a^4x^6}$

b) $\sqrt[3]{64x^3y^{-3}z^4}$

7. Calcular

a) $3\sqrt{8}+4\sqrt{18}-3\sqrt{50}+\sqrt{32}$

b) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

8. Multiplicar

a) $\sqrt{xy}\sqrt[3]{xy}$

b) $\left(\sqrt{a+b}-2\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a+b}+2\sqrt{a-b}\right)$

9. Dividir

$$\frac{y\sqrt[3]{x^2y}}{x\sqrt{xy}}$$

10. Racionalizar el denominador de $\dfrac{x^2-y^2}{2x\sqrt{x+y}}$.

Respuestas

1. $(a)^2$

2. $\dfrac{1}{3}$

3. $\dfrac{10}{3}$

4. $\dfrac{x^9y^2}{6}$

5. a) $a-b$ b) $x^{5/2}+2x^{3/2}+x^{1/2}$

6. a) $5ax\sqrt{x}$ b) $4xy^{-1}z\sqrt[3]{z}$

7. a) $7\sqrt{2}$ b) $\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{xy}$

8. a) $\sqrt[6]{x^5y^5}$ b) $-3a+5b$

9. $\dfrac{1}{x}\sqrt[6]{xy^5}$

10. $\dfrac{(x-y)\sqrt{x+y}}{2x}$

Capítulo 2. Expresiones Algebraicas, Productos Notables y Factorización.

VARIABLES

Una variable es un símbolo que se utiliza para representar cualquier elemento de un conjunto de reemplazo determinado. Si tal conjunto es $\mathbb{R}$, entonces la variable representa un número real.

CONSTANTES

Una constante es un símbolo que representa a solo un elemento de un conjunto determinado.

Ejemplo 1.
Si se escribe la suma $7x^2+3x+2$, la letra x es el símbolo correspondiente a una variable y los numerales 7, 3 y 2 son símbolos para constantes.

2.1 Expresiones Algebraicas

El término expresión algebraica se utiliza para representar una constante, una variable o una combinación de variables y constantes que implican un número finito de operaciones indicadas sobre ellas.

Ejemplo 2.

Ejemplos de expresiones algebraicas

$$x^3+x^2-\sqrt{5}x-7$$

$$\frac{5xy+6x}{2x-3x^2y^3}$$

$$\frac{\sqrt{x+y}-7}{(z+3)^3-\sqrt[3]{x}}$$

En una expresión algebraica cada una de las partes separadas por un signo $(+)$ o por un signo menos $(-)$ se denomina términos de la expresión. Así por ejemplo, en la expresión $x^3y^2+\frac{5}{7}x^2y+xy$ existen tres términos, $x^3y^2, \frac{5}{7}x^2y, xy$.

En un término se distinguen tres elementos fundamentales: el signo, el coeficiente y la parte variable.

El signo será $(+)$ o $(-)$, e indicará la operación a realizar con la expresión algebraica.

El coeficiente, será un número real y la parte variable (literal) está constituida por una o más variables y su correspondiente exponente, que representa el grado del término.

Ejemplo 3

En la expresión $7x^4$, el signo es $(+)$, el coeficiente es 7 y la variable x^4

2.2 Polinomios

Ciertas expresiones algebraicas tienen nombres especiales. Un monomio en una variable es cualquier expresión algebraica de la forma ax^n, donde a es un número real, x es una variable y n es un entero no negativo. El número a se llama coeficiente del monomio y n es el grado. Por ejemplo, $13x^4$ es un monomio de grado 4 con coeficiente 13. La suma de dos monomios recibe el nombre de binomio. Un polinomio es la suma finita de monomios.

Un polinomio de grado n en la variable x es una expresión algebraica de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ejemplo 4.

La expresión algebraica $4x^2 - 3x - 8$ es un polinomio de segundo grado.

TÉRMINOS SEMEJANTES

Son aquellos términos que difieren sólo es sus coeficientes constantes.
Por ejemplo, $8x^2$ y $4x^2$ son términos semejantes.

Reducir términos semejantes significa reunir varios términos en uno solo. Para reducir se suman algebraicamente los coeficientes y se coloca la misma parte variable.
Así por ejemplo, la expresión algebraica $2x^2y + 3xy^2 - x^2y + 5xy^2$ se puede reducir a $x^2y + 8xy^2$.

IGUALDAD DE POLINOMIOS

Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios de igual grado, entonces $p(x)$ y $q(x)$ son iguales si los coeficientes de los términos semejantes son iguales.

Ejemplo 5.
Sean $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 5$ y $q(x) = ax^3 - x^2 + 2x - 5$. Determine el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que $p(x) = q(x)$.

Solución
Ambos polinomios tienen el mismo grado y, tomando los coeficientes de los términos semejantes, en particular de x^3, se tiene que $a = 2$.

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación se utilizan para clasificar y facilitar el manejo de expresiones algebraicas.

Los signos de agrupación más utilizados son los paréntesis redondos $(\ )$, paréntesis angular o corchetes $[\ ]$ y paréntesis de llaves $\{\ \}$.

Ejemplo 6.
En la expresión $5x-\left(xy-4y^2\right)+\left\{2y-\left[3xy-\left(x^3+7y\right)+5y^2\right]\right\}$, suprimir los signos de agrupación y reducir los términos semejantes.

Solución

$$5x-xy+4y^2+\left\{2y-\left[3xy-x^3-7y+5y^2\right]\right\}$$
$$=5x-xy+4y^2+\left\{2y-3xy+x^3+7y-5y^2\right\}$$
$$=5x-xy+4y^2+2y-3xy+x^3+7y-5y^2$$
$$=5x-4xy-y^2+9y+x^3$$

2.3 Operaciones con Expresiones Algebraicas

ADICIÓN

Para sumar expresiones algebraicas se procede de la siguiente forma:
1. Se suprimen los signos de agrupación
2. Se reducen los términos semejantes

Ejemplo 7.
Resolver $\left(4x^2-3y^2\right)-\left(7xy+y^2\right)-\left(5x^2+6xy+10y^2\right)$

Solución

$$=4x^2-3y^2-7xy-y^2-5x^2-6xy-10y^2$$
$$=-x^2-14y^2-13xy$$

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar dos o más expresiones algebraicas se debe realizar el siguiente procedimiento:

1. Producto de los signos
1.1 Producto de signos iguales resulta positivo.
1.2 Producto de signos diferentes resulta negativo.
2. Producto de los coeficientes
3. Producto de las partes variables
4. Finalmente, se reducen los términos semejantes, si los hay.

Ejemplo 8.

Resolver $\left(5x^3y^7\right)\left(-7x^5y^2z^4\right)$

<u>Solución</u>

$$=\left(5\right)\left(-7\right)\left(x^3x^5\right)\left(y^7y^2\right)z^4$$
$$=-35x^8y^9z^4$$

DIVISIÓN

Como la división es un caso particular de la multiplicación, se cumplen para ésta las leyes de los signos vistas en producto.

1. División de monomios

Pasos a seguir:

1. Realizar el cuociente de los signos.
2. Realizar el cuociente de los coeficientes.
3. Realizar el cuociente de la parte variable.

Ejemplo 9.

$$-12x^3y^5 \div (-4xy^2) = 3x^2y^3$$

2. División de polinomios

Pasos a seguir:

1. Ordenar en forma decreciente, con respecto al exponente, ambos polinomios.
2. Dividir el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtiene el primer término del cuociente
3. Multiplicar este primer término del cuociente por todos los términos del divisor. El producto obtenido se resta del dividendo.
4. La diferencia obtenida se considera como el nuevo dividendo y se continúa con el procedimiento como en los pasos anteriores, hasta que el grado del dividendo sea menor que el grado del divisor.

Ejemplo 10.

Divida: $3x^3+14x^2+17x+11$ entre $x+3$

<u>Solución</u>

$$\begin{array}{l}
3x^3+14x^2+17x+11 \div x+3 = \ 3x^2+5x+2 \\
\underline{-3x^3-9x^2} \\
5x^2+17x+11 \\
\underline{-5x^2-15x} \\
\qquad 2x+11 \\
\qquad \underline{-2x-6} \\
\qquad\qquad 5
\end{array}$$

Tenemos como cuociente $3x^2+5x+2$ y como resto 5.

Observaciones

1. En una división se tiene que cumplir que:

$$\frac{dividendo}{divisor} = cuociente + \frac{resto}{divisor}, \quad \text{con } divisor \neq 0$$

o

$$dividendo = (divisor)(cuociente) + resto, \text{ con } divisor \neq 0$$

2. Cuando el resto es cero, se dice que la división es exacta.
3. La división de polinomios se puede simplificar cuando el divisor tiene la forma $x - a$.
   Este proceso es conocido como división sintética o método de Ruffini-Horner.

Método de Ruffini-Horner

Pasos a seguir:

1. Se escriben los coeficientes del dividendo en el mismo orden que las potencias decrecientes de x. Si falta una de éstas se coloca un cero en el lugar que le corresponde. (primera línea)
2. Como divisor se coloca a con signo contrario
3. Se vuelve a escribir, debajo de los coeficientes del dividendo, el coeficiente de la mayor potencia de x (tercera línea) y se multiplica por a. El producto obtenido se coloca inmediatamente debajo del coeficiente de x que sigue en orden (segunda línea), y se suma con éste. La suma obtenida se multiplica por a y el producto obtenido se coloca debajo del coeficiente que sigue y se suma con el mismo. Se continúa así con el procedimiento hasta obtener un producto que se suma al término constante.
4. El último número de la tercera línea es el resto o residuo, y los otros, leídos de izquierda a derecha, son los coeficientes del cuociente, cuyo grado es siempre menor en uno que el grado del dividendo.

Ejemplo 11.

$$2x^4 + x^3 - 16x^2 + 18 \div x + 2$$

<u>Solución</u>

2	1	−16	0	18	
	−4	6	20	−40	
2	−3	−10	20	−22	−2

Por lo tanto, el cuociente es $2x^3 - 3x^2 - 10x + 20$, y el resto -22.

Ejercicio 2.1

1. Determine el grado de cada uno de los siguientes polinomios:

   a) $7x^3+3x-1$
   b $-\sqrt{3}x+\sqrt{3}x^2$
   c) $0,7x^6+5,15$

2. Si $p(x)=(a+1)x^2+3x+b$ y $q(x)=7x+3x^2+3$, encuentre valores de a y b, tales que $p(x)=q(x)$.

3. Indicar si las siguientes expresiones algebraicas son términos semejantes:

   a) $-7x^4, 5x^4, \frac{3}{5}x^4, x^4$

   b) $4xy^2, 7x^2y, -\frac{1}{5}x^2y^2$

4. Ejecutar la operación indicada:

   a) $(2x^5+7x-3)\ +\ (5x^3+11)$
   b) $(9x^2+5x-7)\ +\ (-15x^2+10x-12)$

5. Efectuar la operación indicada:

   a) $\left(-x^3+7x^2-3\right)-\left(7x^3-11x+10\right)$
   b) $\left(-x-2y+2\right)-\left(5x-4xy+2y\right)$

6. Multiplicar los siguientes polinomios.

   a) $\left(x+2\right)\left(x^2-3x+5\right)$
   b) $\left(t^2+2t+3\right)\left(t^3-3t^2+1\right)$

7. Efectúe la división:

   a) $\left(9x^2-12x\right)\div\left(3x\right)$

   b) $\dfrac{20v^4w^2-15v^2w^3+10v^3w}{5v^2w}$

8. Encuentre el cociente y el residuo al dividir:

   a) $\dfrac{y^2-5y+6}{y-2}$

   b) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^2-2x+2}$

9. Encontrar el perímetro de un rectángulo de $(3x^2+5)$ cm y (x^3+5x^2-2) cm de Lados.

10. El perímetro de un cuadrilátero es 36 cm. Si la suma de las medidas de dos de sus lados es $16x+8$ m, encontrar la suma de las medidas de los otros dos lados.

Respuestas

1. a) 3 b) 2 c) 6
2. $a = 6$, $b = 3$
3. a) Sí b) No
4. a) $2x^5 + 5x^3 + 7x + 8$ b) $-6x^2 + 15x - 19$
5. a) $-8x^3 + 7x^2 + 11x - 13$ b) $-6x - 4y + 4xy + 2$
6. a) $x^3 - x^2 - x + 10$ b) $t^5 - t^4 - 3t^3 - 8t^2 + 2t + 3$
7. a) $3x - 4$ b) $4v^2w - 3w^2 + 2v$
8. a) Cociente, $y - 3$; residuo, 0 b) Cociente, $x^2 - 1$; residuo $-5x + 7$
9. $(2x^3 + 16x^2 + 6)$ cm.
10. $(28 - 16x)$ m.

2.4 Productos Notables

Ciertos productos de binomios ocurren con frecuencia por lo que se debe aprender a reconocerlos.

Fórmulas de Productos Notables

1.$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2.$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3.$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

4.$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

5.$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

6.$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$

7.$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

8.$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + (bd)$

Ejemplo 12.

Desarrollar

a) $(3x-4)^2$

b) $(2a+t)^3$

<u>Solución</u>

a) $(3x-4)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(-4) + (-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

b) $(2a+t)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(t) + 3(2a)(t)^2 + (t)^3 = 8a^3 + 12a^2t + 6at^2 + t^3$

2.5 Factorización

El proceso de factorización consiste en escribir un polinomio como producto de otros polinomios. En la factorización cada polinomio en el producto se llama factor del polinomio original.
Este proceso puede ser muy útil para simplificar expresiones. En general, el primer paso en la factorización de cualquier expresión algebraica es determinar si los términos tienen un factor común.

Ejemplo 13.

Determinar los factores o divisores de $x^2 + 4x$

<u>Solución</u>

$$x^2 + 4x = x(x+4)$$

Luego,

x y $x+4$ son factores o divisores de $x^2 + 4x$

Polinomio irreducible o primo

Sea $p(x)$ un polinomio no constante con coeficientes reales. Decimos que $p(x)$ es un polinomio irreducible o primo en los reales si no se puede escribir como producto de dos polinomios no constantes de reales.
Todo polinomio $p(x)$ de grado $n \in \mathbb{N}$ se puede escribir en forma única como el producto de polinomios irreducibles.

Ejemplo 14.

El polinomio $2x^3 + 5x^2$ se puede representar como: $2x^3 + 5x^2 = x(2x^2 + 5x)$.

El factor $2x^2 + 5x$ no es factor irreducible de $2x^3 + 5x^2$ ya que tiene otros factores.
Esto es, $2x^2 + 5x = x(2x+5)$.

Tanto x como $2x+5$ son factores irreducibles de $2x^2 + 5x$. Así obtenemos:
$2x^3 + 5x^2 = x \cdot x(2x+5) = x^2(2x+5)$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

1. $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
2. $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$
3. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
4. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
5. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Ejemplo 15.

Factorizar $8x^3 + 27y^6$

Solución

$$8x^3 + 27y^6 = (2x)^3 + (3y^2)^3 = (2x + 3y^2)\left[(2x)^2 - (2x)(3y^2) + (3y^2)^2\right]$$

$$= (2x + 3y^2)(4x^2 - 6xy^2 + 9y^4)$$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS CUADRÁTICOS

A veces es posible factorizar los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$, donde $a,b,c \in \mathbb{R}$, como $(Ax + B)(Cx + D)$ donde $A,B,C,D \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 16

Factorizar $9x^2 - 30x + 25$

Solución

$$9x^2 = (3x)^2$$

$$25 = (5)^2$$

$$-30x = -2(3x)(5)$$

$$\therefore 9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$$

Ejemplo 17.

Factorizar $x^6 - y^6$

Solución

$$x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$$

$$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$= (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$$

EXPRESIONES RACIONALES

El cociente de dos polinomios se llama expresión racional.

Ejemplo 18.

Calcular $\dfrac{2x+5}{x^2-16}+\dfrac{x-1}{x^2+8x+16}$

Solución

$$\frac{2x+5}{x^2-16}+\frac{x-1}{x^2+8x+16}=\frac{2x+5}{(x-4)(x+4)}+\frac{x-1}{(x+4)^2}$$

$$=\frac{(2x+5)(x+4)+(x-1)(x-4)}{(x+4)^2(x-4)}$$

$$=\frac{2x^2+8x+5x+20+x^2-4x-x+4}{(x+4)^2(x-4)}$$

$$=\frac{3x^2+8x+24}{(x+4)^2(x-4)}$$

Ejercicio 2.2

1. Desarrollar:

a) $(a+2b)^2$

b) $(2x+5y)^2$

c) $(3-2y)^2$

2. Multiplicar usando productos notables:

a) $(4v-7)(5v-2)$

b) $(5x+2)^2(5x-2)^2$

c) $(3y+4)^2(3y-4)^2$

3. Multiplicar usando productos notables:

a) $(7v-5w)(7v+5w)(v-w)$

b) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$

c) $(a^3-b^3)(a^3+b^3)(a^6+b^6)$

4. Efectúe la operación indicada:

a) $\dfrac{8y^2-16y-4}{4}$

b) $\dfrac{30(a+b)^2-50(a+b)}{2(a+b)}$

5. Escribir los polinomios siguientes como un producto de polinomios irreducibles sobre el conjunto de los reales:
   a) $7y^3 - 49y^2$
   b) $14x^2y - 35xy^2 - 49x^2y^2$
6. Exprese lo siguiente como producto de factores irreducibles:
   a) $t^2 - 14t + 45$
   b) $9x^2 - 42x + 49$
   c) $25y^3 - 10y^2 + y$
7. Factorizar completamente en los reales:
   a) $y^3 - 7y^2 + 14y$
   b) $t^{10} - t^2$
   c) $x^4 - 5x^2 + 4$
8. En cada una de las ecuaciones encontrar el o los números reales que satisfacen la ecuación:
   a) $\dfrac{t^2 - 4t}{2} = 0$
   b) $x^2 = x + 12$
   c) $x^2 - x - 6 = 0$
9. Simplifique cada expresión:
   a) $\dfrac{2x^2 + x - 6}{x + 2}$
   b) $\dfrac{4y^2 - 1}{4y^2 - 4y + 1}$
   c) $\dfrac{t^2 + 3t - 4}{(t^2 - 16)(t^2 - 1)}$
10. Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:
   a) $\dfrac{3x}{(x+2)^2} + \dfrac{2}{x+2}$
   b) $\dfrac{1}{3x^2 + 11x - 4} + \dfrac{1}{3x^2 - 13x + 4}$
   c) $\dfrac{x^2 - 4}{2x + 14} \cdot \dfrac{x^2 + 10x + 21}{6x - 12} \div \dfrac{x^2 + 5x + 6}{12x}$

Respuestas

1. a) $a^2+4ab+4b^2$ b) $4x^2+20xy+25y^2$ c) $9-12y+4y^2$

2. a) $20v^2-43v+14$ b) $625x^4-200x^2+16$ c) $81y^4-288y^2+256$

3. a) $49v^3-25vw^2-49v^2w+25w^3$ b) $27x^3-y^3$ c) $a^{12}-b^{12}$

4. a) $2y^2-4y-1$ b) $15(a+b)-25$

5. a) $7y^2(y-7)$ b) $7xy(2x-5y-7xy)$

6. a) $(t-9)(t-5)$ b) $(3x-7)^2$ c) $y(5y-1)^2$

7. a) $y(y^2-7y+14)$ b) $t^2(t^4+1)(t^2+1)(t+1)(t-1)$
   c) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$

8. a) 0 y 4 b) -3 y 4 c) 3 y -2

9. a) $2x-3$ b) $\dfrac{2y+1}{2y-1}$ c) $\dfrac{1}{(t-4)(t+1)}$

10. a) $\dfrac{5x+4}{(x+2)^2}$ b) $\dfrac{2x}{(3x-1)(x+4)(x-4)}$ c) x

Capítulo 3. Ecuaciones e Inecuaciones

3.1 Ecuación

Una ecuación es una igualdad que contiene una o más cantidades desconocidas llamadas incógnitas.
Existen diferentes tipos de ecuaciones de acuerdo a las expresiones que las conforman: ecuaciones algebraicas, trigonométricas, exponenciales, etc.

3.2 Ecuaciones lineales en una variable

Una ecuación lineal en una variable tiene la forma $ax+b=0$, $a,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$. Se llama lineal porque el exponente de x es uno.
Dos o más ecuaciones son equivalentes si, y solamente si, tienen el mismo conjunto solución.
La transformación de una ecuación en otra más sencilla es resultado de la aplicación de una serie de propiedades que permiten expresar la ecuación inicial en una equivalente. Estas propiedades son:

1. Se puede sumar o restar un mismo número a ambos lados de una igualdad sin que ésta se altere.
2. Se puede multiplicar o dividir a ambos lados de la igualdad por el mismo número (distinto de cero) y ésta no se altera.

Ejemplo 1.

Resuelva $9x-6=5x+10$

Solución

Sumamos 6 a ambos lados para obtener

$9x-6+6=5x+10+6$

$9x=5x+16$

Restamos 5x a ambos lados y se obtiene

$9x-5x=5x-5x+16$

$4x=16$

Se divide ambos lados entre 4 y se obtiene

$x=4$

El conjunto solución es $S=\{4\}$

Comprobación

La solución se puede comprobar sustituyendo x por 4 en la ecuación original como sigue:

$9(4)-6=5(4)+10$

$36-6=20+10$

$30=30$

Las dos propiedades anteriores dan origen a ciertas reglas que son las que se utilizan en la práctica y que se pueden resumir como: en una ecuación, cualquier expresión puede ser trasladada de un miembro a otro realizando la operación contraria a la inicial, así: si está sumando, pasa a restar; si está restando, pasa a sumar, si está multiplicando, pasa a dividir y si está dividendo, pasa a multiplicar.

Ejemplo 2.

Resuelva $\frac{4}{9}x+7=\frac{6}{7}-5x$

Solución

$$\frac{4}{9}x+5x=\frac{6}{7}-7$$

$$\frac{4x+45x}{9}=\frac{6-49}{7}$$

$$\frac{49x}{9}=\frac{-43}{7}$$

$$49x(7)=-43(9)$$

$$343x=-387$$

$$x=-\frac{387}{343}$$

El conjunto solución es $S=\left\{-\frac{387}{343}\right\}$

FÓRMULAS Y APLICACIONES

Una gran cantidad de aplicaciones de las matemáticas requieren el uso de fórmulas que incluyen varias variables. A menudo, es necesario cambiar una fórmula dada por una forma más conveniente. Se puede despejar una variable deseada en términos de las variables restantes, encontrando ecuaciones equivalentes.

Ejemplo 3.

El área de un triángulo con base b y altura h está dada por $A=\frac{1}{2}bh$. Despeje h.

Solución

$$A=\frac{1}{2}bh$$

$$2A=2\left(\frac{1}{2}bh\right)$$

$$2A=bh$$

$$\frac{1}{b}(2A)=\frac{1}{b}(bh)$$

$$\frac{2A}{b}=h$$

$$\therefore h=\frac{2A}{b}$$

3.3 Ecuaciones cuadráticas en una variable

Una ecuación cuadrática en una variable tiene la forma $ax^2+bx+c=0$ donde $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

Ejemplo 4.

Las siguientes ecuaciones son cuadráticas:

$x^2-49=0$, $5x^2-50x=0$ y $25x^2+15x+5=0$.

Métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas

1. Método de factorización

Este método se basa en la propiedad de la multiplicación por cero.

Ejemplo 5

Resuelva $x^2-5x+6=0$

Solución

Factorizando el lado izquierdo se obtiene

$$\left(x-2\right)\left(x-3\right)=0$$

A continuación se iguala cada factor a cero y se obtiene

$$x-2=0\vee x-3=0$$

La solución de la primera de estas ecuaciones es 2, y la solución de la segunda es 3.

$$\therefore S=\{2,3\}$$

Nota:

No todas las expresiones de la forma ax^2+bx+c son factorizables, es decir, que este método no se podrá aplicar en todos los casos; por lo tanto es necesario analizar otros métodos de solución.

2. Método de completar cuadrados

Algunas expresiones cuadráticas son trinomios cuadrados perfectos, siempre es posible completar el cuadrado.

Ejemplo 6.

1) $x^2+10x+25=\left(x+5\right)^2$

2) $9x^2-30x+25=\left(3x-5\right)^2$

Ejemplo 7.

Resuelva $2x^2+2x-1=0$

Solución

En primer lugar dividimos ambos lados de la ecuación por 2 y obtenemos:

$$x^2+x-\frac{1}{2}=0$$

A continuación escribimos la ecuación como:

$$x^2+x=\frac{1}{2}$$

Sumando la mitad del coeficiente de x al cuadrado a ambos lados de la ecuación, se tiene:

$$x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

Al sacar raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$x+\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\therefore S=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3},-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$$

3. La fórmula cuadrática

A partir de la forma cuadrática $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$
Aplicando el método de completar cuadrado, se tiene:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

La naturaleza de estas raíces está determinado por b^2-4ac, al cual se le llama discriminante (D).

Discriminante	**Raíces**
$b^2-4ac>0$	reales diferentes
$b^2-4ac<0$	complejas
$b^2-4ac=0$	Reales iguales

Ejemplo 8.

Resuelva $6x^2-x-12=0$

Solución

Aplicando la fórmula cuadrática, se tiene:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(6)(-12)}}{2(6)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{12}$$

$$x = \frac{1 \pm 17}{12}$$

$$x_1 = \frac{18}{12} \vee x_2 = \frac{-16}{12}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \vee x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right\}$$

3.4 Ecuaciones con radicales

Si una ecuación algebraica contiene radicales o exponentes racionales, puede resolverse elevando ambos lados de la ecuación a la misma potencia entera. Las soluciones obtenidas (aparentes) se deben verificar en la ecuación original.

Ejemplo 9.

Resuelva $x - 5 = \sqrt{x+7}$

Solución

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$(x-5)^2 = \left(\sqrt{x+7}\right)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 = x + 7$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$(x-2)(x-9) = 0$$

$$x - 2 = 0 \vee x - 9 = 0$$

$$x_1 = 2 \vee x_2 = 9$$

Si sustituimos $x = 2$ en la ecuación original, encontramos que:

$$2 - 5 = -3 \neq \sqrt{2+7} = 3.$$

Por tanto $x = 2$, no es solución.

Si sustituimos $x = 9$ en la ecuación original, se tiene:

$$9 - 5 = 4 = \sqrt{9+7} = 4$$

$$\therefore S = \{9\}$$

3.5 Ecuaciones con valores absolutos

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se aplica la propiedad. Para $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene: $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$.

Ejemplo 10.

Resuelva $|4x-5| = |9-5x|$

<u>Solución</u>

La ecuación dada se satisface si:

$$4x-5 = 9-5x \quad \vee \quad 4x-5 = -(9-5x)$$
$$4x+5x = 9+5 \quad \vee \quad 4x-5x = -9+5$$
$$9x = 14 \quad \vee \quad -x = 4$$
$$x = \frac{14}{9} \quad \vee \quad x = 4$$

Ambos valores de x satisfacen la ecuación original

$$\therefore S = \left\{\frac{14}{9}, 4\right\}$$

Ejercicio 3.1

1. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales

   a) $7v + 4 = 25$
   b) $4x - 3 = 11 - 3x$
   c) $3(4x+9) = 7(2-5x) - 2x$
   d) $y = y + 11$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones racionales

   a) $\frac{18}{x} - 4 = 2$
   b) $\frac{3}{5-3x} = \frac{1}{2}$
   c) $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+5} = \frac{8}{x^2-25}$
   d) $\frac{t^2+6t}{t^2-4} = \frac{t+3}{t-2}$

3. Resuelva para x en términos de las otras variables

   a) $3ax + 6ab = 7ax + 3ab$
   b) $a(x-a) - 2b(x-3b) = ab$

c) $\dfrac{x+b}{3a-4b}=\dfrac{x-a}{2a-5b}$

4. Despeje la cantidad indicada en la fórmula dada

a) $A=\dfrac{1}{2}(a+b)h$; para h

b) $S=\dfrac{a-rl}{1-r}$; para r

5. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas

a) $5x^2-12=0$

b) $8t^2+10t-3=0$

c) $49y^2+84y+36=0$

d) $x^2-4x+7=0$

6. Resuelva

a) $\dfrac{70}{x^2-4x+3}=\dfrac{23}{1-x}-3$

b) $\dfrac{3}{2x+4}-\dfrac{4}{x-2}=\dfrac{3}{2x^2-8}$

7. Determinar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones con radicales

a) $\sqrt{4y-4}=y$

b) $\sqrt{4x+5}-x=0$

c) $\sqrt[3]{x^2}=x$

8. Escriba las expresiones siguientes como un binomio al cuadrado

a) x^2+6x+9

b) $x^2-5x+\dfrac{25}{4}$

c) $x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}$

9. Escribir $\sqrt{x^2+2x-3}$ en la forma $\sqrt{(x-h)^2-a^2}$

10. Resuelva para $x\in\mathbb{R}$

a) $|3x-8|=4$

b) $|7-2x|=9$

c) $|y-4|=|5-2y|$

Respuestas

1. a) $\{3\}$ b) $\{2\}$ c) $\left\{-\dfrac{13}{49}\right\}$ d) $\varnothing$

2. a) $\{3\}$ b) $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ c) $\{4\}$ d) $\{6\}$

3. a) $x=\dfrac{3}{4}b$, $a\neq 0$ b) $x=a+3b$, $a\neq 2b$ c) $x=3a-5b$, $a\neq -b$

4. a) $h=\dfrac{2A}{a+b}$ b) $r=\dfrac{a-S}{l-S}$

5. a) $\left\{-\dfrac{2}{5}\sqrt{15},\dfrac{2}{5}\sqrt{15}\right\}$ b) $\left\{-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{4}\right\}$ c) $\left\{-\dfrac{6}{7}\right\}$ d) $\left\{2\pm\sqrt{3}i\right\}$

6. a) $\left\{-\dfrac{5}{3},-2\right\}$ b) $\{-5\}$

7. a) $\{2\}$ b) $\{5\}$ c) $\{0,1\}$

8. a) $(x+3)^2$ b) $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$ c) $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$

9. $\sqrt{(x+1)^2-2^2}$

10. a) $\left\{\dfrac{3}{4},4\right\}$ b) $\{-1,8\}$ c) $\{1,3\}$

3.6 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmica

Una ecuación exponencial es una ecuación en la cual la variable concurre como exponente o como término de un exponente. Una ecuación logarítmica es una ecuación que comprende el logaritmo de una función de la variable.

Ejemplo 11

Son ecuaciones exponenciales:

$$3^x = 7$$

$$3^{x+1} = 5^{x-2}$$

Ejemplo 12.

Es ecuación logarítmica

$$\log(x) + \log(x-1) = 2$$

Muchas ecuaciones exponenciales y logarítmicas se pueden resolver mediante el uso de la definición de logaritmo y las leyes de los logaritmos.

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

$\forall N \in \mathbb{R}^+$ y $b > 0, b \neq 1$

$\log_b(N) = L$ equivale a $b^L = N$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sean M y N números reales positivos, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ y $b \neq 1$.

- $\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$
- $\log_b\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$
- $\log_b(N^\alpha) = \alpha \log_b(N)$, para cualquier número real α.
- $\log_a(N) = \dfrac{\log_b(N)}{\log_b(a)}$

Ejemplo 13.

Resolver para $x \in \mathbb{R}$

$$3^{x+4} = 5^{x+2}$$

Solución

Tomando los logaritmos comunes en ambos lados y la ley 3), se tiene:

$$\log\left(3^{x+4}\right)=\log\left(5^{x+2}\right)$$

$$\left(x+4\right)\log(3)=\left(x+2\right)\log(5)$$

$$x\log(3)+4\log(4)=x\log(5)+2\log(5)$$

$$x\left(\log(3)-\log(5)\right)=2\log(5)-4\log(3)$$

$$x(\log(3)-\log(5))=\log(25)-\log(81)$$

$$x=\frac{\log(25)-\log(81)}{\log(3)-\log(5)}$$

Calculando los logaritmos con cuatro decimales, se tiene:

$$x=\frac{1,3979-1,9085}{0,4771-0,6990}$$

$$x=\frac{-0,5106}{-0,2219}$$

$$x=2,301$$

$$S=\{2,301\}$$

Ejemplo 14.

Resolver para $x \in \mathbb{R}$

$$\log_6\left(x+3\right)+\log_6\left(x-2\right)=1$$

Solución

Aplicando la ley 1), se tiene:

$$\log_6\left(x+3\right)\left(x-2\right)=1$$

$$\left(x+3\right)\left(x-2\right)=6^1$$

$$x^2+x-6=6$$

$$x^2+x-12=0$$

$$\left(x+4\right)\left(x-3\right)=0$$

$$x=-4 \vee x=3$$

Sólo sirve la solución $x=3$. Ya que el logaritmo de un número negativo no existe. Además, $x=3$ satisface la ecuación original.

$$\therefore S=\{3\}$$

3.7 Sistema de Ecuaciones Lineales

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una gran cantidad de aplicaciones de las matemáticas conducen a más de una ecuación con diversas incógnitas. Las ecuaciones resultantes son llamadas sistema de ecuaciones y el conjunto solución consiste de todas las soluciones comunes para las ecuaciones en el sistema.
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y puede escribirse como:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{array}\right|$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales. Si un par ordenado (x, y) satisface un sistema de dos ecuaciones lineales, el punto correspondiente a (x, y) deberá estar en la intersección de las dos rectas, que son las gráficas de las ecuaciones.

Al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas su conjunto solución puede presentar una de las siguientes posibilidades:

1. La intersección de los dos conjuntos solución contiene exactamente un par ordenado. Las gráficas se cortan en un punto. En este caso las ecuaciones son consistentes e independientes.
2. La intersección de los dos conjuntos solución es el conjunto vacío. Las gráficas son paralelas. Se dice que las ecuaciones son inconsistentes.
3. Los conjuntos solución de las dos ecuaciones son iguales. Las gráficas son la misma recta. En este caso se dice que las ecuaciones son dependientes.

Para obtener soluciones exactas de sistemas de ecuaciones lineales, se debe utilizar métodos algebraicos. Estos métodos consisten en reemplazar el sistema dado por un sistema equivalente, el cual tiene el mismo conjunto solución.
Un método para encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es llamado **método de sustitución**. Se reemplaza una de las variables en una de las ecuaciones por su igual de la otra ecuación, se tendrá un sistema equivalente.

Ejemplo 15.

Utilizar el método de sustitución para encontrar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=6 \\ 3x+y=20 \end{array}\right|$$

<u>Solución</u>

Despejando la incógnita y en la ecuación $3x+y=20$ se tiene:

$$y=20-3x$$

Sustituyendo el valor de $y = 20 - 3x$ en $2x - 3y = 6$ obtenemos:

$$2x - 3(20 - 3x) = 6$$
$$2x - 60 + 9x = 6$$
$$11x = 66$$
$$x = 6.$$

Sustituyendo $x = 6$ en $y = 20 - 3x$ resulta:

$$y = 20 - 3(6)$$
$$y = 20 - 18$$
$$y = 2.$$
$$\therefore S = \{(6,2)\}$$

Otro enfoque para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales se llama **método de eliminación.** En este método se sustituye una de las ecuaciones del sistema por la ecuación obtenida de la forma siguiente: multiplicando cada ecuación por un número real diferente de cero, y sumando las ecuaciones resultantes. Así, se obtiene un sistema equivalente. Se eligen los factores de tal manera que al sumar las ecuaciones resultantes se elimine una de las incógnitas.

Ejemplo 16.

Mediante el método de eliminación encontrar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{l|} 7x + y = 19 \\ 4x - y = 3 \\ \hline \end{array}$$

Solución

Basta sumar las ecuaciones miembro a miembro para eliminar la y, obteniéndose:

$$11x = 22$$
$$x = 2$$

Sustituyendo este valor de $x = 2$ en la ecuación $7x + y = 19$ resulta:

$$7(2) + y = 19$$
$$14 + y = 19$$
$$y = 19 - 14$$
$$y = 5$$
$$\therefore S = \{(2,5)\}$$

Sistema de Ecuaciones Fraccionarias

Si una de las ecuaciones de un sistema o ambas, contienen fracciones es, en general, conveniente comenzar por reducirlas a la forma entera. Sin embargo, cuando las ecuaciones son lineales en $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ es mejor dejarlas en forma fraccionaria, considerando provisionalmente a $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{y}$ como incógnitas.

Ejemplo 17.

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2x+3y}{3}+2=\dfrac{5x+6y}{5} \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}+5=\dfrac{3x+y}{2} \end{array}\right|$$

<u>Solución</u>

Multiplicando la primera ecuación por 15 para suprimir denominadores, se obtiene:

$$10x+15y+30=15x+18y$$

$$5x+3y=30$$

Multiplicando la segunda ecuación por 30 resulta:

$$10x+6y+150=45x+15y$$

$$35x+9y=150$$

El nuevo sistema equivalente es:

$$5x+3y=30$$

$$35x+9y=150$$

Multiplicando la ecuación $5x+3y=30$ por 3 se tiene:

$$15x+9y=90$$

$$35x+9y=150$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene:

$$x=3$$

Reemplazando el valor de $x=3$ en la ecuación $5x+3y=30$ resulta:

$$15+3y=30$$

$$y=5$$

$$\therefore S=\{(3,5)\}$$

Sistema de tres ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se elimina una incógnita entre dos ecuaciones y luego se elige otro par de ecuaciones y se vuelve a eliminar la misma incógnita. Resulta así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se resuelve de la manera ya estudiada.

Ejemplo 18.

Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 4x-2y-3z=8 \\ 5x+3y-4z=4 \\ 6x-4y-5z=12 \end{array}\right|$$

<u>Solución</u>

Comencemos por eliminar la variable x entre las dos primeras ecuaciones multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda por -4:

$$20x - 10y - 15z = 40$$
$$-20x - 12y + 16z = -16$$

Sumando se obtiene:

$$-22y + z = 24$$

Eliminemos de nuevo la x entre las ecuaciones primera y tercera del sistema dado, multiplicando la primera ecuación por 6 y la tercera por -4:

$$24x - 12y - 18z = 48$$
$$-24x + 16y + 20z = -48$$

Sumando obtenemos:

$$4y + 2z = 0$$

Tomando el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$-22y + z = 24$$
$$4y + 2z = 0$$

Multiplicando la ecuación $-22y + z = 24$ por (-2) tenemos:

$$44y - 2z = -48$$
$$4y + 2z = 0$$

Sumando obtenemos:

$$48y = -48$$
$$y = -1$$

Reemplazando $y = -1$ en la ecuación $4y + 2z = 0$ obtenemos:

$$4(-1) + 2z = 0$$
$$z = 2$$

Sustituyendo los valores de $y = -1$ y $z = 2$ en la ecuación $4x - 2y - 3z = 8$ resulta:

$$4x - 2(-1) - 3(2) = 8$$
$$4x + 2 - 6 = 8$$
$$4x - 4 = 8$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$
$$\therefore S = \{(3, -1, 2)\}$$

Nota

Otros métodos para resolver sistema de ecuaciones lineales serán estudiados en su primer curso de Matemática en la Universidad.

Ejercicio 3.2

1. Encontrar el valor de N si $\log_7(N)=2$
2. Encontrar el valor de b si $\log_b(125)=3$
3. Encontrar el valor de a si $\log_{27}(3)=a$
4. Resuelva las siguientes ecuaciones:

    a) $3^x=81$
    b) $4^x+2^{x+3}=48$

5. Resolver:

a) $\log 4x=3$
b) $\log(x-5)+\log(x+4)=1$
c) $\log_2 \dfrac{x+4}{x-3}=3$

6. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas:

a)
$$\left.\begin{array}{l} 2x-3y=-4 \\ 3x+y=5 \end{array}\right|$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ 5x+3y=10 \end{array}\right|$$

c)
$$\left.\begin{array}{l} 6x-3y=5 \\ 2x-y=4 \end{array}\right|$$

7. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas:

a)
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=18 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=-5 \end{array}\right|$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2}+\dfrac{y-2}{4}=x-4 \\ \dfrac{x-4}{3}+\dfrac{y-3}{6}=\dfrac{x+y-10}{2} \end{array}\right|$$

8. Resuelva los siguientes sistemas:

a)
$$\left.\begin{array}{l} x+y=m \\ x-y=n \end{array}\right|$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ 2x-3y=1 \end{array}\right|$$

9. Resuelva

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y-z=-4 \\ 2x+3y+4z=11 \\ 5x-4y-2z=14 \end{array}\right|$$

10. Resuelva

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y-5z=37 \\ 2x-3y+2z=-8 \\ x-2z=11 \end{array}\right|$$

Respuestas

1. $N=49$
2. $b=5$
3. $a=\frac{1}{3}$
4. a) $S=\{4\}$ b) $S=\{2\}$
5. a) $S=\{250\}$ b) $S=\{6\}$ c) $S=\{4\}$
6. a) $S=\{(1,2)\}$ b) $S=\{(-1,5)\}$ c) $S=\varnothing$
7. a) $S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right\}$ b) $S=\{(7,6)\}$
8. a) $S=\left\{\left(\frac{m+n}{2},\frac{m-n}{2}\right)\right\}$ b) $S=\left\{\left(\frac{b+3c}{3a+2b},\frac{2c-a}{3a+2b}\right)\right\}$
9. $S=\{(2,-3,4)\}$
10. $S=\{(3,2,-4)\}$

3.8 Inecuaciones

Los enunciados que incluyen relaciones de orden tales como $2x-3>5$ se llaman inecuaciones. Resolver una inecuación significa encontrar el conjunto de todos los números reales para los cuales el enunciado es verdadero. Se dice que dos inecuaciones son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones.

Operaciones que producen inecuaciones equivalentes.

Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$

1. Si $a<b$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $a+c<b+c$
2. Si $a<b$ y $c \in \mathbb{R}^{+}$, entonces $a \cdot c<b \cdot c$
3. Si $a<b$ y $c \in \mathbb{R}^{-}$, entonces $a \cdot c>b \cdot c$

Observación
Las operaciones anteriores también son aplicables con $>, \leq$ y $\geq$.

3.9 Inecuaciones Lineales

Cualquiera inecuación de la forma $ax+b<0,\, a \neq 0,\, a,b \in \mathbb{R}$ se llama inecuación lineal en x. Si el símbolo $<$ se remplaza por $\leq, >, \geq$, la inecuación resultante también se llama inecuación lineal.

Ejemplo 19.

Resuelva para $x \in \mathbb{R}$.
$5x-11<9$

Solución

Las desigualdades siguientes son equivalentes

$$5x-11+11<9+11$$

$$5x<20$$

$$x<4$$

$$S=\left]-\infty,4\right[$$

Ejemplo 20.

Resuelva para $x \in \mathbb{R}$.
$3 \leq 6x+9<27$

Solución

La solución de la desigualdad es una solución de ambas desigualdades

$$3 \leq 6x+9 \wedge 6x+9<27$$

Resolviendo ambas desigualdades, se tiene:

$$3-9 \le 6x \wedge 6x < 27-9$$
$$-6 \le 6x \wedge 6x < 18$$
$$\frac{-6}{6} \le x \wedge x < \frac{18}{6}$$
$$-1 \le x \wedge x < 3$$
$$S = [-1, 3[$$

3.10 Inecuaciones Cuadráticas

Una inecuación cuadrática tiene la forma $ax^2+bx+c<0, a \ne 0, a, b, c \in \mathbb{R}$. (el símbolo $<$ puede remplazarse por $\le, >, \ge$).

Para resolver una desigualdad cuadrática, emplearemos los números críticos y número de prueba.

Un número crítico de la desigualdad ax^2+bx+c es una raíz real de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

Supongamos que r_1 y r_2 son los números críticos reales y $r_1 < r_2$. Entonces, el polinomio ax^2+bx+c puede cambiar de signo algebraico sólo en r_1 y r_2.

Así, el signo $(+ \vee -)$ de ax^2+bx+c será constante en cada uno de los intervalos $]-\infty, r_1[\,;\,]r_{1,} r_2[\,;\,]r_{2,}+\infty[$.

Para determinar el signo en los intervalos, se calcula el valor de ax^2+bx+c en un número de prueba arbitrario en el intervalo. A partir de estos resultados se obtiene el conjunto solución de la desigualdad.

Ejemplo 21.

Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

$$x^2-2x-8<0$$

<u>Solución</u>

$$x^2-2x-8<0$$
$$(x+2)(x-4)=0$$
$$x+2=0 \vee x-4=0$$
$$x_1=-2 \vee x_2=4$$

Las raíces -2 y 4 son los números críticos de la desigualdad.

Tabla

	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,4[$	4	$]4,+\infty[$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-4)$	$+$		$-$		$+$

$$\therefore S =]-2-4[$$

3.11 Inecuaciones con valor absoluto.

Muchas aplicaciones importantes de desigualdades incluyen valor absoluto.
Para resolver desigualdades con valor absoluto se debe tener presente las siguientes propiedades.
Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

1) $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.

2) $|x| > a$ si y sólo si $x < -a \vee x > a$

Las propiedades 1) y 2) también se aplican con $\leq$ y $\geq$.

Ejemplo 22.
Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

$|3x-7| > 1$

Solución
El conjunto solución de la desigualdad es:

$3x-7 > 1 \vee 3x-7 < -1$

$3x > 8 \vee 3x < 6$

$x > \dfrac{8}{3} \vee x < 2$

$S = \left]-\infty, 2\right[\cup \left]8/3, +\infty\right[$

Ejemplo 23.
Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

$\left|\dfrac{2-3x}{5x-3}\right| \leq 2$

Solución

$$\left|\frac{2-3x}{5x-3}\right| \leq 2 \iff \frac{2-3x}{5x-3} \geq -2 \quad \wedge \quad \frac{2-3x}{5x-3} \leq 2$$

$$\iff \frac{2-3x}{5x-3}+2 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{2-3x}{5x-3}-2 \leq 0$$

$$\iff \frac{2-3x+10x-6}{5x-3} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{2-3x-10x+6}{5x-3} \leq 0$$

$$\iff \frac{7x-4}{5x-3} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{8-13x}{5x-3} \leq 0$$

$$\iff 7x-4=0; 5x-3=0 \quad \wedge \quad 8-13x=0; 5x-3=0$$

$$\iff x=\frac{4}{7}; x=\frac{3}{5} \quad \wedge \quad x=\frac{8}{13}; x=\frac{3}{5}$$

Tabla para $\dfrac{7x-4}{5x-3} \geq 0$

	$\left]-\infty, \frac{4}{7}\right[$	$\frac{4}{7}$	$\left]\frac{4}{7}, \frac{3}{5}\right[$	$\frac{3}{5}$	$\left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$
7x - 4	–	0	+	+	+
5x - 3	–	–	–	0	+
$\dfrac{7x-4}{5x-3}$	+	0	–	no esta definido	+

$$S_1 = \left]-\infty, \frac{4}{7}\right] \cup \left]\frac{3}{5}, +\infty\right[$$

Tabla para $\dfrac{8-13x}{5x-3} \leq 0$

	$\left]-\infty, \frac{3}{5}\right[$	$\frac{3}{5}$	$\left]\frac{3}{5}, \frac{8}{13}\right[$	$\frac{8}{13}$	$\left]\frac{8}{13}, +\infty\right[$
$8-13x$	+	+	+	0	–
$5x-3$	–	0	+	+	+
$\dfrac{8-13x}{5x-3}$	–	no esta definido	+	0	–

$$S_2 = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[\cup \left[\frac{8}{13}, +\infty\right[$$

$$\therefore\ S = S_1 \cap S_2 = \left]-\infty, \frac{4}{7}\right] \cup \left[\frac{8}{13}, +\infty\right[$$

Ejercicio 3.3

1. Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

1.1 $x+1>3$

1.2 $-2x+1 \leq x+3$

2. Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

2.1 $\dfrac{2x-1}{3}+1 \geq \dfrac{x+1}{2}$

2.2 $\dfrac{3x-2}{2}-1 < \dfrac{2x-1}{4}$

3. Encuentre el conjunto solución de las desigualdades:

3.1 $(x-1)(2x+1) \leq 0$

3.2 $3x^2-5x+2>0$

4. Encuentre el conjunto solución de las desigualdades:

4.1 $-2>-3-3x \geq -7$

4.2 $-4 < \dfrac{5x+3}{-6} \leq 2$

5. Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

5.1 $x(11-3x)<10$

5.2 $y^3 \leq 16y$

6. Encuentre el conjunto solución de las desigualdades:

6.1 $|x|<6$

6.2 $|x-1|>7$

6.3 $|2x-7| \geq 9$

7. Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

7.1 $|x^2-5| \leq 4$

7.2 $|y^2-5y|<6$

7.3 $|t^2-17| \geq 8$

8. Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

8.1 $|(3x+2)-8|<1$

8.2 $\left|\left(\dfrac{1}{2}x-5\right)+7\right| > \dfrac{1}{4}$

9. Encuentre el conjunto solución de la desigualdad

$|2x+1|<|3x+5|$

10. Resuelva para $x \in \mathbb{R}$

$\left|\dfrac{4x+1}{2x-3}\right| > \dfrac{2}{5}$

Respuestas

1.

1.1 $\left]2,+\infty\right[$

1.2 $\left]-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]$

2.

2.1 $\left[-1,+\infty\right[$

2.2 $\left]-\infty,\dfrac{7}{4}\right[$

3.

3.1 $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

3.2 $\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

4.

4.1 $\left]-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right]$

4.2 $\left[-3,\dfrac{21}{5}\right[$

5.

5.1 $\left]-\infty,\dfrac{5}{3}\right[\cup\left]2,+\infty\right[$

5.2 $\left]-\infty,-4\right]\cup\left[0,4\right]$

6.

6.1 $\left]-6,6\right[$

6.2 $\left]-\infty,-6\right[\cup\left]8,+\infty\right[$

6.3 $\left]-\infty,-1\right]\cup\left[8,+\infty\right[$

7.

7.1 $\left[-3,-1\right]\cup\left[1,3\right]$

7.2 $\left]-1,2\right[\cup\left]3,6\right[$

7.3 $\left]-\infty,5\right]\cup\left[-3,3\right]\cup\left[5,+\infty\right[$

8.

8.1 $\left]\dfrac{5}{3},\dfrac{7}{3}\right[$

8.2 $\left]-\infty,-\dfrac{9}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{7}{2},+\infty\right[$

9. $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]-\dfrac{6}{5},+\infty\right[$

10. $\left]-\infty, \frac{-11}{16}\right[\cup \left]\frac{1}{24}, \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

Capítulo 4. Planteamiento de Ecuaciones

El plantear ecuaciones es una habilidad muy importante para la resolución de problemas, para ello tenemos que traducir un problema dado en un lenguaje convencional, al lenguaje matemático con ayuda de símbolos, variables o incógnitas.

4.1 Traducción de enunciados

A continuación, presentamos la traducción de ciertos enunciados a su forma simbólica matemática.

Enunciado (forma verbal)	**Expresión Matemática (forma simbólica)**
La suma de dos números consecutivos más 5.	$(x)+(x+1)+5$
El cuadrado de la suma de dos números x e y.	$(x+y)^2$
La suma de los cuadrados de dos números x e y.	x^2+y^2
El doble, de lo que tengo aumentado en 15.	$2(x+15)$; tengo: x
El doble de lo que tengo, aumentado en 15.	$2x+15$; tengo: x
Yo tengo \$1.000 menos que tú o también se dice tú tienes \$1.000 más que yo.	yo: $x-1.000$ tú: x
A excede a B en 6; lo cual se pude enunciar como: A es mayor que B en 6. El exceso de A sobre B es 6. B es excedido por A en 6. La diferencia entre A y B es 6.	$A-B=6$; $A: x+6$ $B: x$
A es el doble de B o equivalentemente: A es dos veces B. B es la mitad de A.	A=2B; $A: 2x$ $B: x$
A es a B como 3 es a 5	$\frac{A}{B}=\frac{3}{5}$; $\begin{matrix} A: 3k \\ B: 5k \end{matrix}$, k : constante
Cinco menos dos veces un número x	5-2x
El producto de tres números consecutivos es igual a p.	$(x)(x+1)(x+2)=p$
Tú tienes el doble de mi dinero que es \$100 más que el dinero de él.	El : x — Tú: $2k$ Yo: 100+ x — Yo: k Tú: $2(100+x)$ — EL: 100-k

OBSERVACIÓN

En líneas generales, plantear una ecuación consiste básicamente en realizar el procedimiento siguiente:

Forma Verbal **Forma Simbólica**

Enunciado $\rightarrow$ Traducción $\rightarrow$ Lenguaje Matemático

Ejemplo 1.

Encuentre dos números consecutivos cuya suma es igual a la cuarta parte del primero más los cinco tercios del segundo.

<u>Solución</u>

Sean los números: n y $(n+1)$

Luego, del enunciado planteamos:

$$n+(n+1)=\frac{1}{4}(n)+\frac{5}{3}(n+1)$$

$$2n+1=\frac{3n+20(n+1)}{12}$$

$$2n+1=\frac{3n+20n+20}{12}$$

$$12(2n+1)=23n+20$$

$$24n+12=23n+20$$

$$24n-23n=20-12$$

$$n=8$$

Los números son: 8 y 9.

Ejemplo 2.

En una fiesta, la relación de mujeres y hombres es 3 es a 4. En un momento dado se retiran 6 mujeres y llegan 3 hombres con lo que la relación es ahora de 3 es a 5. Indique cuántas mujeres deben llegar para que la relación sea 1 a 1.

Solución

	Mujeres	**Hombres**
Antes	3n	4n
	-6	+3
Ahora	3n-6	4n+3

Luego:

$$\frac{3n-6}{4n+3}=\frac{3}{5}$$

$$5(3n-6)=3(4n+3)$$

$$15n-30=12n+9$$

$$15n-12n=9+30$$

$$3n=39$$

$$n=\frac{39}{3}$$

$$n=13$$

Ahora: Mujeres: $3n-6=3(13)-6=33$

Hombres: $4n+3=4(13)+3=55$

Digamos que deben llegar x mujeres para que la relación sea de 1 a 1.
Cuando dos cantidades están en relación de1 a 1 significa que deben ser iguales.

Es decir:

$$33+x=55$$
$$x=22$$

$\therefore$ Deben llegar 22 mujeres.

Ejercicio 4.1

1. El triple de un número es igual al número aumentado en 8. Encuentre el número.
2. La suma de dos números es 35 y su diferencia es 5. Encuentre los números.
3. La suma de cuatro números es 90. El segundo número es el doble del primero, el tercero es el doble del segundo y el cuarto es el doble del tercero. ¿Cuáles son los números?
4. El largo de un rectángulo es el triple del ancho y su perímetro es de 56 cm. Encuentre sus dimensiones.
5. En un número de dos cifras la cifra de las decenas excede en 5 a la cifra de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras resulta un nuevo número que sumado con el anterior da 121. Encuentre el número.
6. El denominador de una fracción es 4 unidades mayor que el numerador. Si a cada término de la fracción se agrega 5 la fracción resultante es equivalente a 2/3. Encontrar la fracción original
7. Juan puede hacer un trabajo en 15 días y Mario puede hacer el mismo trabajo en 10 días. ¿Qué tiempo tardarán trabajando conjuntamente?
8. Luís y Pablo tienen conjuntamente \$500. Pablo tiene \$120 más que Luís. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?
9. Un estanque tiene 2000 litros de capacidad y contiene una cantidad de agua que es dos tercios de lo que le falta para llenarse. ¿Qué cantidad de agua hay en el estanque?
10. En un velódromo entraron 18400 espectadores. Había 900 más hombres que mujeres y el número de niños era la tercera parte del número de mujeres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños entraron?

Respuestas.

1. 4
2. 15, 20
3. 6, 12, 24, 48.
4. Ancho, 7 cm; largo, 21cm.
5. 83
6. 3/7
7. 6 días
8. Luís \$190, Pablo \$310
9. 800 litros.
10. Hombres, 8400; Mujeres, 7500; Niños, 2500.

4.2 Problemas sobre edades

Los sujetos son los protagonistas del problema, a quienes corresponden las edades y que intervienen en el problema.
El tiempo es uno de los elementos más importantes, ya que las condiciones del problema ocurren en tiempos diferentes (pasado, presente o futuro) y todo depende de su correcta interpretación.

A continuación, presentamos los diferentes tiempos con sus expresiones.

TIEMPOS	**EXPRESIONES**
PRESENTE En un problema existe un solo presente	- Tengo… - Tienes… - Tenemos… - Hoy la edad… - La suma de nuestras edades es… - Etc.
PASADO En un problema pueden darse uno o más pasados.	- Hace… - Tenía, tuve… - Teníamos - Tenías, tuviste… - Tuvimos… - La suma de nuestras edades fue… - Etc.
FUTURO En un problema pueden darse uno o más futuros.	- Dentro de… - Tendremos… - Tendré… - Tendrás - La suma de nuestras edades será… - Etc.

La edad representa el tiempo de vida de un sujeto. Entre las edades se establecen determinadas relaciones, llamadas condiciones, las cuales se cumplen en un mismo tiempo o entre tiempos diferentes.

Ejemplo 3.

Hoy tengo 30 años, pero dentro de 6 años tendré el doble de la edad que tenía hace 12 años.

Tiempo	**Hace 12 años**	**Hoy**	**Dentro de 6 años**
Edad	18	30	36

Con un sólo sujeto

Cuando interviene la edad de un solo sujeto.
Si mi edad actual es a años, entonces, dentro de x años y hace y años, mi edad se expresará de la siguiente manera:

Pasado		**Presente**		**Futuro**
$a-y$	$-$	a	$+$	$a+x$

Observación

Cuando en el enunciado de un problema se mencionan; Hace… o dentro de…, se debe tomar como punto de referencia el tiempo presente; a partir de allí se cuenta el tiempo transcurrido (hace…) o el tiempo a transcurrir (dentro de…).

Ejemplo 4.

Dentro de 40 años tendré 3 veces la edad que tenía hace 20 años. ¿Qué edad tuve hace 5 años?

<u>Solución</u>

Sea x la edad actual en años:

Pasado		**Presente**		**Futuro**
$x-20$	$-$	x	$+$	$x+40$

De acuerdo a la condición del problema:

$$x+40=3(x-20)$$

$$x+40=3x-60$$

$$x=50$$

Edad Actual: 50 años

$\therefore$ Hace 5 años tuve 45 años.

Con varios sujetos

Cuando intervienen las edades de dos o más sujetos.

<u>Observación</u>

1. Para este tipo de problemas se recomienda utilizar un cuadro de doble entrada, como el que se presenta a continuación:

Sujetos / Tiempos	**Pasado**	**Presente**	**Futuro**
Yo			
Tú			
El			

El cuadro se completa con edades y condiciones.

2. En los problemas con tiempo especificado se hace mención de cuándo va a ocurrir una determinada condición o cuando ya ocurrió; es decir, mencionan dentro de cuánto tiempo o hace cuánto tiempo ocurrirá u ocurrió la condición del problema.

Ejemplo 5.

Hace 4 años la edad de María era el cuádruple de la edad de Marta, pero dentro de 5 años será el triple. Encontrar la suma de las edades actuales.

Solución

	Hace 4 años	**Presente**	**Dentro de 5 años**
María	$4x$	$4x+4$	$4x+9$
Marta	x	$x+4$	$x+9$

De la última condición:

$$4x+9=3(x+9)$$

$$4x+9=3x+27$$

$$x=18$$

Edades actuales:

María: $4x+4=4(18)+4=76$

Marta: $x+4=18+4=22$

$\therefore$ Suma: 76+22= 98 años.

4.3 Problemas sobre móviles

Un móvil es el cuerpo o partícula que está en movimiento.
Físicamente hablando, se dice que un móvil está en movimiento cuando su vector posición, con respecto a un sistema de ejes determinados, cambia con el tiempo. Si el vector posición del móvil no cambia con el tiempo, se dice que dicho móvil está en reposo relativo.
La trayectoria es la línea recta o curva que describe el móvil en su movimiento.
El desplazamiento es la variación de dos vectores posición; podemos decir, también, que es el vector que une el punto de partida con el punto de llegada.
La distancia es el módulo de desplazamiento.
Se puede llamar velocidad a aquella magnitud vectorial, cuyo módulo nos indica la rapidez con que se mueve un cuerpo de un lugar a otro. Cuando la velocidad es constante, se considera al movimiento como uniforme.

Observación
Cuando el movimiento es en línea recta (o sea, el movimiento es rectilíneo y uniforme), el desplazamiento y la trayectoria coinciden, lo cual implica que el recorrido y la distancia son iguales.

Ejemplo 6.

Pedro recorre de A hacia B con velocidad de 60m/min., durante 10 min.; determine la distancia y el espacio recorrido.

Solución

Pedro en 1 minuto recorre 60m, entonces en 10 minutos recorrerá 10 veces lo que recorre en 1 minuto; es decir: $10(60m) = 600m$.

Comprobamos que:

El recorrido (e) = 600m
La distancia (d) = 600m.

Luego:

$$e = d$$

Observación

Los problemas de móviles que desarrollaremos están enmarcados dentro del movimiento rectilíneo uniforme, donde la aceleración es igual a cero.

Ejemplo 7.

Juan recorre, durante 2 horas, a una velocidad de 10 km/h. Determine el espacio recorrido.

Solución

Espacio recorrido = Tiempo $\cdot$ Velocidad = $2(10) = 20km$.

Observación

En general:

Distancia (d) =Velocidad (v) $\cdot$ Tiempo (t) = $v \cdot t$

$$\text{Velocidad } (v) = \frac{Distancia}{Tiempo} = \frac{d}{t}$$

$$\text{Tiempo } (t) = \frac{Distancia}{Velocidad} = \frac{d}{v}$$

Ejemplo 8.

Un automóvil viaja con velocidad constante de 90 km/h. ¿Qué distancia recorrerá en 10 s?

Solución

Antes de aplicar la fórmula $d = v \cdot t$; debemos efectuar conversiones:

1km. equivale a 1000 m.
1h. equivale a 3600 s.

Luego:

$$90\frac{km}{h} \times \frac{1000m}{1km} \times \frac{1h}{3600s} = 90 \times \frac{1000}{3600}\frac{m}{s} = 90 \times \frac{5}{18}\frac{m}{s} = 25\frac{m}{s}$$

Nos piden la distancia que el automóvil recorrerá en 10 s.

Como $d = v \cdot t$; tendremos que: $d = \left(25\frac{m}{s}\right)(10s) = 250m$.

$\therefore$ Recorrerá 250 m.

TIEMPO DE ENCUENTRO

Sean A y B dos móviles, con velocidad V_A y V_B respectivamente y d la distancia que los separa, se tiene:

El tiempo de encuentro $(t_{encuentro}) = \frac{d}{V_A + V_B}$

Ejemplo 9.
Dos móviles separados 2000 m. van al encuentro uno del otro, en direcciones contrarias, con velocidad de 20 m/s y 30 m/s. ¿En cuánto tiempo se encontrarán?

<u>Solución</u>

Aplicando la fórmula $(t_{encuentro}) = \frac{d}{V_A + V_B}$, se tiene que:

$$(t_{encuentro}) = \frac{2000m}{20m/s + 30m/s} = \frac{2000m}{50m/s} = 40s$$

$\therefore$ El tiempo a emplear es 40s.

TIEMPO DE ALCANCE

Sean A y B dos móviles, con velocidad V_A y V_B, $(V_A > V_B)$ respectivamente y d la distancia que los separa, se tiene:

El tiempo de alcance $(t_{alcance}) = \frac{d}{V_A - V_B}$

Ejemplo 10.

El móvil A persigue al móvil B, ambos móviles separados a 400m., la velocidad del móvil A es 60 m/s y la del móvil B es 20 m/s. En cuánto tiempo lo alcanzará?

<u>Solución</u>

Aplicando la fórmula $(t_{alcance}) = \frac{d}{V_A + V_B}$, se tiene que:

$$(t_{alcance}) = \frac{400m}{60m/s - 20m/s} = \frac{400m}{40m/s} = 10s$$

$\therefore$ El tiempo a emplear es 10s.

RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD Y ESPACIO RECORRIDO DE DOS MÓVILES PARA UN MISMO TIEMPO.

Si la velocidad de dos móviles están en la relación de m a n y el movimiento se realiza durante el mismo tiempo para ambos (es decir: el tiempo es constante); entonces, la relación de las distancias recorridas será como m es a n y, en forma inversa: si las distancias recorridas son como m es a n (siendo el tiempo que dure el movimiento igual para ambos móviles); entonces, la velocidad de ambos estarán en la razón de m a n

Ejemplo 11.

Dos móviles se desplazan durante cierto tiempo, con una velocidad de 35 km/h y 45 km/h, respectivamente. ¿Cuál es la relación de espacios recorridos?

Solución

Sean A y B los móviles.

Sabemos que $\frac{V_A}{V_B}=\frac{35}{45}=\frac{7}{9}$.

Luego:

$$\frac{e_A}{e_B}=\frac{7}{9}\Rightarrow \begin{array}{l} e_A=7k \\ e_B=9k \end{array}$$

RELACIÓN ENTRE LAS VELOCIDADES Y EL TIEMPO PARA ESPACIOS IGUALES.

En general:

	Móvil 1	**Móvil 2**	**Relación de velocidad**	**Relación de tiempo**
Velocidad	V_1	V_2	$\frac{V_1}{V_2}=\frac{a}{b}$	
Tiempo	t_1	t_2		$\frac{t_1}{t_2}=\frac{b}{a}$
Distancia	d_1	d_2		

Ejemplo 12.

Dos autos van a recorrer 200 km. Uno lo hace en 2 horas y el otro en 4 horas. ¿En qué proporción está la velocidad de ambos y que relación existe con la proporción de tiempos?

Solución

Sean A y B los autos.

Como: $v = \dfrac{d}{t}$

Calculamos $V_A = \dfrac{200km}{2h} = 100km/h$; velocidad del primer auto

Y también $V_B \dfrac{200km}{4h} = 50km/h$; la velocidad del segundo auto.

Luego:

La relación de velocidad es: $\dfrac{V_A}{V_B} = \dfrac{100}{50} = \dfrac{2}{1}$; V_A es a V_B como 2 es a 1 en forma contraria a lo que ocurre con la relación de tiempos: $\dfrac{t_A}{t_B} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$; t_A es a t_B como 1 es a 2.

Ejercicio 4.2

1. La edad de un padre es el triple de la de su hija. En 12 años la edad del padre será el doble de la de su hija. ¿Qué edad tiene cada uno actualmente?
2. Hace 5 años la edad de un padre era el triple de la de su hijo y dentro de 5 años será el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?
3. La edad actual de Pedro es el triple de la edad que tenía hace 20 años. ¿Cuál es su edad actual?
4. A tiene 20 años y B tiene 12 años. ¿Cuándo la edad de A será el doble de la de B.
5. Marta tiene 11 años y Julia tiene 28 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de Julia será el doble de la de Marta?
6. Un móvil sale de A al mismo tiempo que otro sale de B y van en sentidos opuestos uno al encuentro del otro. El primero lleva una velocidad constante de 45km por hora y el segundo una velocidad, también constante de 35 km por hora. Si la distancia entre A y B es de 400 km. ¿A que distancia de A se encontrarán los móviles y cuánto tiempo tardarán en encontrarse?
7. Un motociclista se demora 1,5 horas más en la noche que en el dia viajar entre dos ciudades. En la noche su velocidad es 40 kilómetros por hora mientras que en el día es de 55 kilómetros por hora. Determine la distancia entre las dos ciudades.
8. Un tren de carga sale de A hacia B a una velocidad de 45 km por hora; 2 horas después sale de A hacia B un tren de pasajeros a una velocidad de 55 km por hora . ¿A qué distancia de A encontrará el segundo tren al primero?
9. La edad de Mario más el doble de la edad de Carlos suman 65 años. El doble de la edad de Mario menos la edad de Carlos da 30 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
10. Un hombre puede remar 20 km río abajo en 2 horas, o bien, 9 km río arriba en 3 horas. Encontrar la velocidad con que rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

Respuestas

1. Padre, 36 años; hija, 12 años.
2. Padre, 35 años; hijo, 15 años
3. 30 años
4. -4 años (hace 4 años)
5. 6 años
6. Distancia, 225 km; tiempo, 5 horas.
7. 220 km.
8. 495 km.
9. Mario 25 años; Carlos 20 años
10. Velocidad agua tranquila, 6,5 km/h; velocidad corriente del río, 3,5 km/h.

Capítulo 5. Funciones

Introducción

La aplicación de las matemáticas se basa en la capacidad de encontrar una representación adecuada de un fenómeno del mundo real. A esta representación se le da el nombre de modelo matemático.
En los modelos matemáticos, las relaciones significativas suelen representarse por medio de funciones. Un modelo es adecuado si logra incorporar los atributos o cualidades del fenómeno que se quiere representar.
En muchas situaciones prácticas, el valor de una cantidad puede depender del valor de otra. Por ejemplo, la cantidad de polución en el aire, en una ciudad, puede depender de la cantidad de automóviles que circulan por sus calles. Esta relación, junto a otras, puede representarse en forma matemática como funciones.
Las funciones que analizaremos en este capítulo estarán definidas sobre los números reales.

5.1 Conceptos básicos

Definición

Una función f es una correspondencia entre dos conjuntos A y B que asigna a cada elemento $x \in A$ uno y sólo un elemento $y \in B$.

Criterios usados para establecer la correspondencia

1. Expresarse como una oración
2. Usando flechas
3. Usando tablas
4. Usando una expresión matemática

Notación funcional

En una función f, el símbolo $f(x)$ (léase f de x) denota el valor particular de y que corresponde al valor de x.

Ejemplo 1.

En la función f definida por: $f(x) = 2x - 3$. Determinar:

a) $f(3)$
b) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$
c) $f\left(\sqrt{5}\right)$
d) $f(x+3)$

Solución

a) $f(3)=2(3)-3=6-3=3$

b) $f\left(-\frac{3}{5}\right)=2\left(-\frac{3}{5}\right)-3=-\frac{6}{5}-3=-\frac{21}{5}$

c) $f\left(\sqrt{5}\right)=2\left(\sqrt{5}\right)-3=2\sqrt{5}-3$

d) $f(x+3)=2(x+3)-3=2x+6-3=2x+3$

Conceptos que intervienen en una función

1. El dominio de la función, que se representa simbólicamente como $Dom(f)$ y se define como el conjunto de elementos de A que tienen una imagen en B.
1. Es decir: $Dom(f)=\{x\in A: f(x)\in B\}$.
2. El recorrido de la función, el cual se representa por $\mathrm{Re}c(f)$ y se define como el conjunto de los elementos de B que son imagen de algún elemento de A.
3. Es decir: $\mathrm{Re}c(f)=\{y\in B: \exists x\in A, f(x)=y\}$
4. Una regla de correspondencia mediante el cual se asigna a cada elemento $x\in Dom(f)$ uno y sólo un elemento $y\in \mathrm{Re}c(f)$ tal que $f(x)=y$. El símbolo $f(x)$ representa la imagen en la correspondencia f.

Ejemplo 2

Sea f la función definida por la siguiente tabla.

x	-1	$-\frac{3}{2}$	-4	0	1	$\frac{3}{2}$	4
$y=f(x)$	1	$\frac{9}{4}$	16	0	1	$\frac{9}{4}$	16

Encontrar el dominio y el recorrido de f.

Solución

El dominio de f corresponde al conjunto de los números asignado por la tabla a x.
Es decir:

$$Dom(f)=\left\{-1,-\frac{3}{2},-4,0,1,\frac{3}{2},4\right\}$$

El recorrido de f es el conjunto de números asignados por la tabla a y.
Es decir:

$$\mathrm{Re}c(f)=\left\{0,1,\frac{9}{4},16\right\}$$

Variables

En una función expresada por una ecuación, $y = f(x)$, las letras x e y que aparecen se denominan variables. El valor numérico de la variable y está determinado por el de la variable x. Por esta razón, y se conoce como la variable dependiente y x, como la variable independiente.

Ejemplo 3

Sea

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = x^2$$

Encontrar:

a) $Dom(f)$

b) $\operatorname{Re}c(f)$

<u>Solución</u>

a) $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{R}\}$.

$Dom(f) = \mathbb{R}$.

Para esta función la variable x no tiene restricción

b) $\operatorname{Re}c(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Re}c(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = x^2, x \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Re}c(f) = \{y \in \mathbb{R} : x = \sqrt{y}, y \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Re}c(f) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$

$\operatorname{Re}c(f) = [0, +\infty[$

Para esta función las imágenes son todos los reales positivo más el cero.

Ejemplo 4.

Sea

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \frac{2}{x+1}$$

Encontrar:

a) $Dom(f)$

b) $\operatorname{Re}c(f)$

Solución

a) $Dom(f)=\{x\in\mathbb{R} : f(x)\in\mathbb{R}\}$

$$Dom(f)=\left\{x\in\mathbb{R} : \frac{2}{x+1}\in\mathbb{R}, x+1\neq 0\right\}$$

$$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$$

b) $\mathrm{Re}c(f)=\{y\in\mathbb{R} : y=f(x), x\neq -1\}$

$$\mathrm{Re}c(f)=\left\{y\in\mathbb{R} : y=\frac{2}{x+1}\right\}$$

$$\mathrm{Re}c(f)=\left\{y\in\mathbb{R} : x=\frac{2-y}{y}, y\neq 0, x\neq -1\right\}$$

$$\mathrm{Re}c(f)=\mathbb{R}-\{0\}$$

Ejemplo 5.

Se estima que dentro de t años, la población de cierta comunidad será de $P(t)=30-\frac{6}{t+1}$ miles.

a) ¿Cuál será la población dentro de 5 años?

b) ¿Cuánto crecerá la población durante el quinto año?

Solución

a) $P(5)=30-\frac{6}{5+1}=30-\frac{6}{6}30-1=29$ miles.

Respuesta: Dentro de 5 años la población será de 29.000 individuos.

b) Quinto año $=P(5)-P(4)$

Quinto año = $29-\left(30-\frac{6}{4+1}\right)=29-\left(30-\frac{6}{5}\right)=29-\frac{144}{5}=\frac{1}{5}$ miles.

Respuesta: Durante el quinto año la población crecerá en 200 individuos.

5.2 Gráfica de una función

La gráfica de una función f es el conjunto formado por todos los puntos (x,y), donde x está en el dominio de f e $y=f(x)$.

Gráfica de una función f por representación de puntos

1. Escoger un grupo representativo de números x a partir del dominio de f y construir una tabla de valores de la función $y=f(x)$ para tales números.
2. Representar los correspondientes puntos (x,y) en un sistema de coordenadas rectangulares y, unir los puntos representados por medio de una curva uniforme.

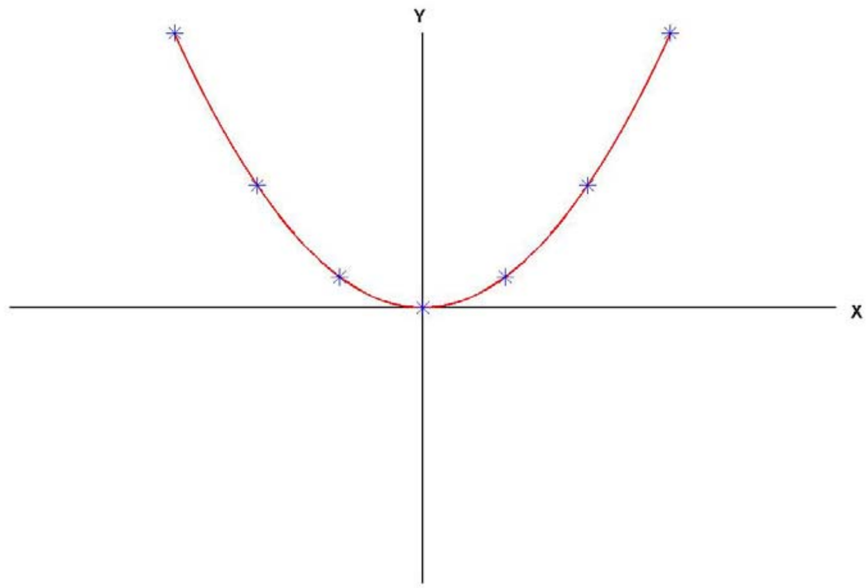
Ejemplo 6.
Construir la gráfica de la función $f(x) = x^2$

Solución

1. Comenzamos construyendo una tabla de valores

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

2. Representamos los (x, y) en un sistema de coordenadas rectangulares y, los unimos mediante una curva uniforme, como:



Intersección con los ejes x e y.

Para encontrar cualquier intersección de $y = f(x)$ con el eje y se hace x igual a cero y se calcula y. Para encontrar cualesquiera intersección de $y = f(x)$ con el eje x se hace y igual a cero y se despeja x.

Ejemplo 7.

Encontrar las intersecciones con los ejes x e y de la función $f(x) = x - 3$ y, graficar f.

<u>Solución</u>

Intersecciones con los ejes.

Para encontrar la intersección con el eje y. Hacemos: $f(0) = 0 - 3 = -3$. Su intersección es: $(0,-3)$. Para encontrar la intersección con el eje x resolvemos la ecuación $f(x) = 0$. Es decir:

$$0 = x - 3$$

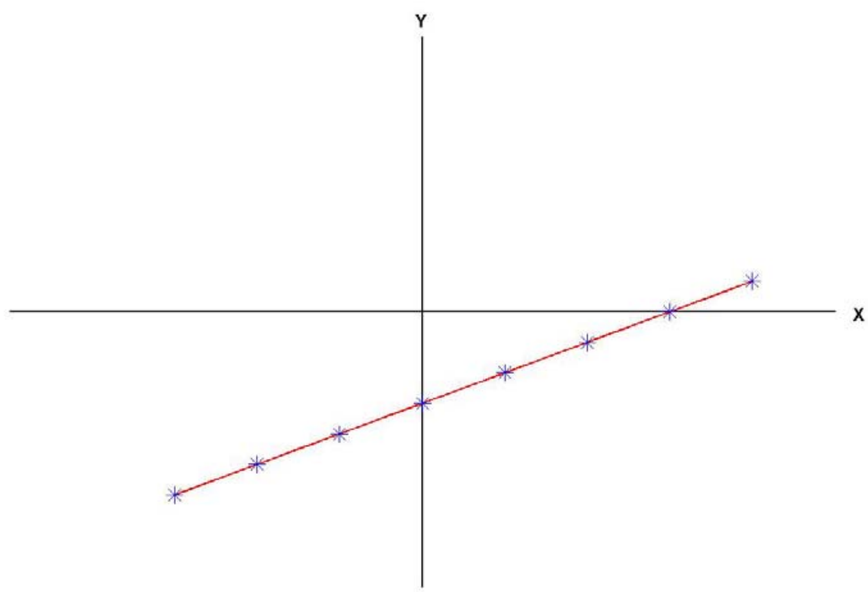
$$x = 3$$

Así, la intersección con el eje x es $(3,0)$.

1. Construimos una tabla de valores

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x - 3$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1

2. Representamos los (x, y) en un sistema de coordenadas rectangulares y, los unimos mediante una curva uniforme, como:



5.3 Funciones Lineales

Una función lineal esta definida por:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\to f(x)=a_1x+a_0,\quad a_1\neq 0,\ a_1,a_0\in\mathbb{R}$$

Una expresión de la forma $f(x)=a_1x+a_0$ es un polinomio de primer grado.

Gráficamente, todo polinomio de primer grado representa una recta en el plano cartesiano. Usualmente la expresión matemática anterior se representa por: $y=mx+b$, con $m\neq 0$, $m,b\in\mathbb{R}$. La constante m de la función lineal se llama la pendiente de la recta que representa dicha función. La constante b es la coordenada y del punto donde la recta corta el eje y denominada coeficiente de posición y es el valor de y cuando x es igual a cero.

Ejemplo 8.

Graficar la función $f(x)=x+2$.

Solución

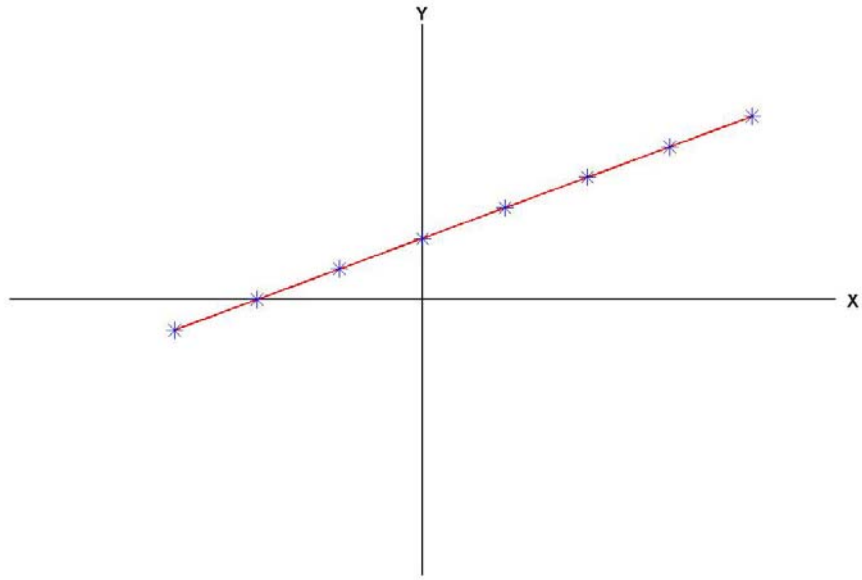
1. La forma más directa de graficar una recta es determinando las intersecciones con los ejes x e y.

Así:

Para $x=0,\ \ y=2$. Primer punto $(0,2)$.

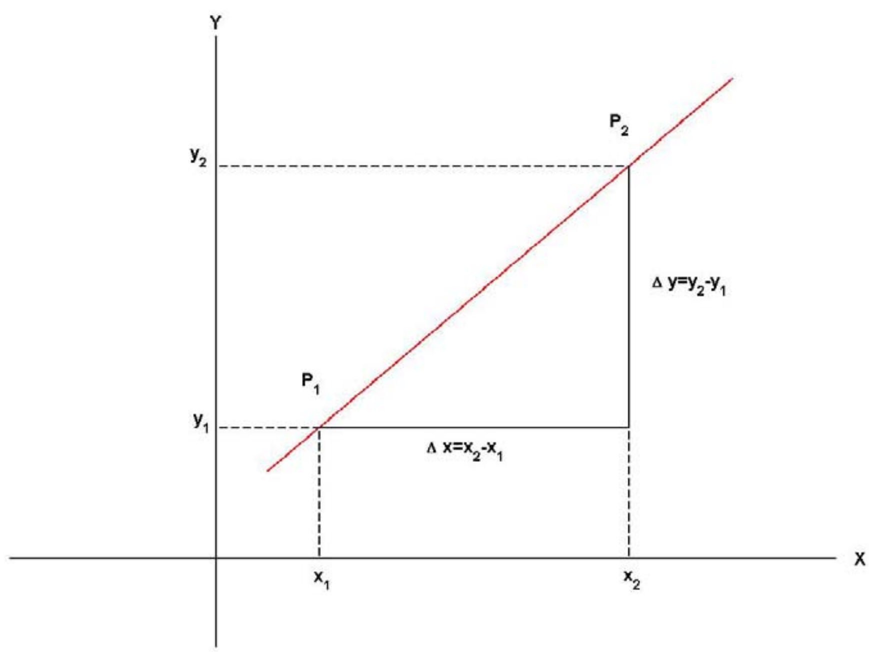
Para $y=0$, $x=-2.$ Segundo punto $(-2,0)$

2. Representamos los dos puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y, los unimos mediante una curva uniforme (recta), como:



Pendiente de una recta

Supongamos que los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ están sobre el gráfico de la función lineal, por lo tanto, sus coordenadas satisfacen la ecuación $y = mx + b$.



Pendiente = $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplo 9.

Encontrar la pendiente de la recta que une los puntos $(-8,-4)$ y $(5,9)$.

<u>Solución</u>

$$m = \frac{9-(-4)}{5-(-8)} = \frac{9+4}{5+8} = \frac{13}{13} = 1$$

5.4 Funciones Cuadráticas

Una función cuadrática esta definida por:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_2 \neq 0$, $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Una función cuadrática es un polinomio de segundo grado. Gráficamente, todo polinomio cuadrático representa una parábola. Usualmente, la expresión matemática anterior se representa por: $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Una parábola queda determinada gráficamente cuando conocemos los siguientes datos:

1) Concavidad
2) Intersecciones con los ejes.
3) Determinación del vértice.

1. **Concavidad**

Para determinar hacia donde se abre la parábola se debe observar el signo del coeficiente de x^2. Si es positivo abre hacia arriba, si es negativo abre hacia abajo.

2. **Intersecciones con los ejes**

Para determinar si la parábola corta al eje x se debe resolver la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, con $a_2 \neq 0$, mediante la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Al utilizar la fórmula cuadrática:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, habrá dos ceros reales distintas;
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, habrá un cero real repetido; y
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, no habrá ceros reales (ceros complejas).

La parábola siempre cortará al eje y; para determinar el corte hacemos $x = 0$ en $f(x) = 0$, obteniendo $y = c$.

3. **Determinación del vértice.**

El vértice corresponde al valor máximo o mínimo de la parábola y se encuentra usando la fórmula $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ o $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

Ejemplo 10.

Graficar la función $y=-x^2-8x+20$

<u>Solución</u>

1. Como $a=-1<0$, entonces la parábola se abre hacia abajo.
2. Dado que $-x^2-8x+20=-\left[(x+10)(x-2)\right]=0$, entonces $x=-10$ y $x=2$ son los cortes de la parábola con el eje x

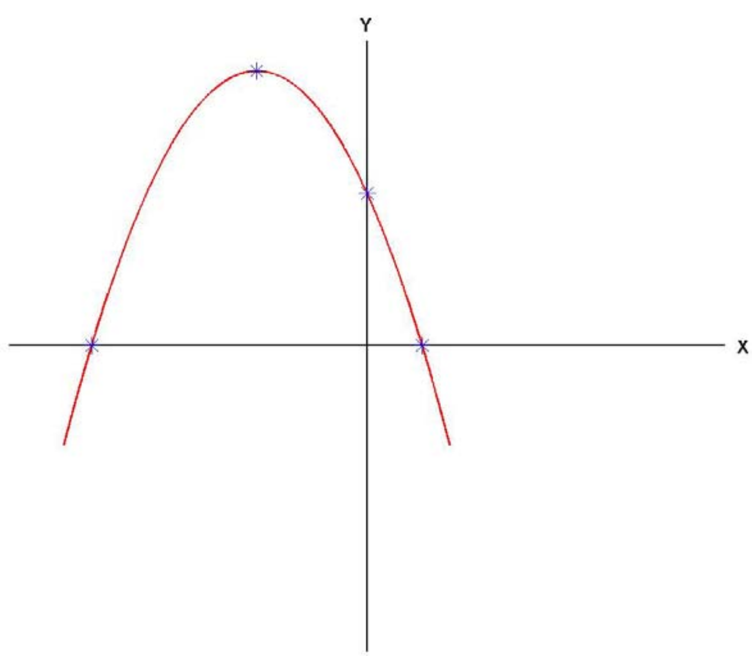
El corte con el eje y se encuentra haciendo $x=0$, en este caso $y=20$.

3. Las coordenadas del vértice se calculan de la siguiente manera:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\left(\frac{-8}{-2}\right)=\left(\frac{8}{-2}\right)=-4 \quad \text{e} \quad y=\frac{4ac}{4a}=\frac{\left[4(-1)(20)-(-8)^2\right]}{\left[4(-1)\right]}=36.$$

Las coordenadas del vértice son: $(-4,36)$.

4. La gráfica de la parábola es:



Ejemplo 11.

Un ganadero desea construir un corral rectangular con 10000metros de cercado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral para que el área sea máxima?

Solución

Si designamos el ancho y el largo del corral por x e y, respectivamente. El área está dada por $A = xy$ y el perímetro es 10000 metros. Por tanto, $2x + 2y = 10000$. Despejando y en esta ecuación tenemos: $y = 5000 - x$. Sustituyendo este resultado en $A = xy$, tenemos: $A = x(5000 - x)$. Así obtenemos el área como una función de la variable x.
Luego, $A(x) = x(5000 - x) = 5000x - x^2$. Puesto que $a = -1 < 0$ la parábola se abre hacia abajo, el valor máximo de A se da en el vértice.
Usando la fórmula de vértice tenemos que: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{5000}{2(-1)} = 2500$.
Puesto que el largo correspondiente es: $y = 5000 - x = 5000 - 2500 = 2500$.
Las dimensiones son 2500 metros por 2500 metros.

Nota.

Más información sobre funciones en su primer curso de Matemática en la Universidad.

Ejercicios 5.1

1. Sea $f(x) = (2x+1)^3$.
   Encontrar:
   a) $f(-1)$,
   b) $f(0)$
   c) $f(1)$
2. Sea $f(t) = t - |t-2|$
   Encontrar:
   a) $f(1)$
   b) $f(2)$
   c) $f(3)$
3. Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$, y $h \neq 0$, encuentre: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
4. Encontrar el dominio de las siguientes funciones reales:
   a) $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x+2}$
   b) $g(x) = \sqrt{2x-6}$
   c) $f(u) = (2u-4)^{3/2}$

5. Sea

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = 3x - 5$$

Determinar:

a) $Dom(f)$

b) $\mathrm{Re}c(f)$

6. Sea

$$f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = |x|$$

Determinar:

a) $Dom(f)$

b) $\mathrm{Re}c(f)$

7. Grafique la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

8. Encuentre la pendiente de la recta que une los puntos: $(3, 2)$ y $(-5, -7)$.

9. Grafique la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

10. Encuentre el valor mínimo de la función definida por $h(t) = 3t^2 + 3t + 2$.

Respuestas

1.	a) -1	b) 1	c) 27
2.	a) 0	b) 2	c) 2

3. $6x - 2 + 3h$

4. a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ b) $Dom(g) = [3, +\infty[$ c) $Dom(f) = [2, +\infty[$

5.

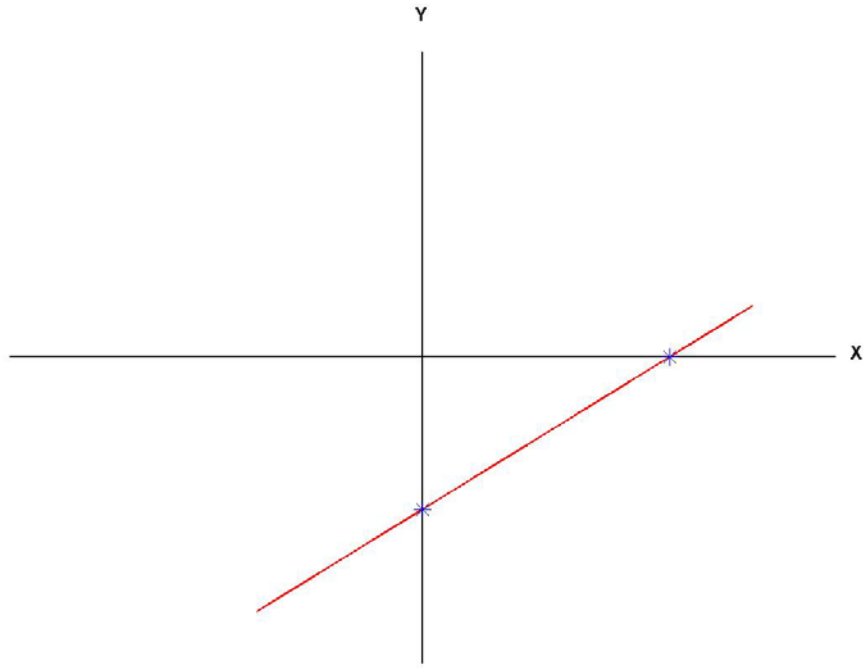
$Dom(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Re}c(f) = \mathbb{R}$

6.

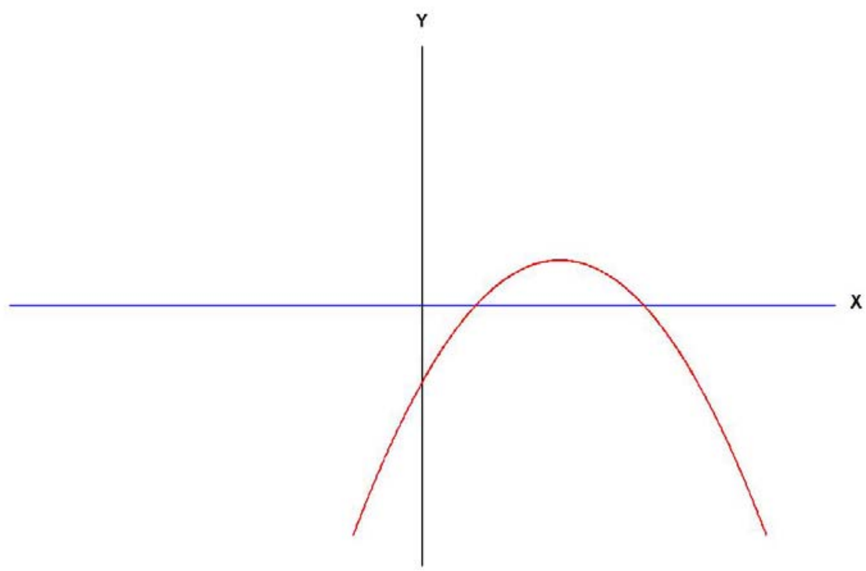
$Dom(f) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Re}c(f) = [0, +\infty[$



8. $m = \dfrac{9}{8}$

9.



10 . $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$

Hoja de Respuestas

Pregunta/ Alternativa	a)	b)	c)	d)	e)
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
11.					
12.					
13.					
14.					
15.					
16.					
17.					
18.					
19.					
20.					
21					
22					
23.					
24.					
25.					
26.					
27.					
28.					
29					
30.					
31.					
32					
33					
34					
35.					
36.					
37.					
38.					
39.					
40.					
41.					
42.					
43.					
44.					
45.					
46.					
47.					
48.					

Respuestas

Pregunta/alternativa	a)	b)	c)	d)	e)
1.				x	
2.				x	
3.			x		
4.					x
5.	x				
6.			x		
7.	x				
8.		x			
9.				x	
10.	x				
11.				x	
12.					x
13.			x		
14.	x				
15.				x	
16.			x		
17.		x			
18		x			
19.			x		
20.		x			
21.	x				
22.	x				
23.	x				
24.				x	
25.				x	
26.				x	
27.		x			
28.				x	
29.			x		
30.			x		
31.	x				
32.					x
33.			x		
34.			x		
35.					x
36.			x		
37.			x		
38.					x
39.		x			
40.	x				
41.		x			
42				x	
43		x			
44.	x				
45					*x*
46.	x				
47.		x			
48.				x	

Tabla de Evaluación

PUNTO	Calificación
	60%
1	1,1
2	1,2
3	1,3
4	1,4
5	1,5
6	1,6
7	1,7
8	1,8
9	1,9
10	2,0
11	2,1
12	2,3
13	2,4
14	2,5
15	2,6
16	2,7
17	2,8
18	2,9
19	3,0
20	3,1
21	3,2
22	3,3
23	3,4
24	3,5
25	3,6
26	3,7
27	3,8
28	3,9
29	4,0
30	4,2
31	4,3
32	4,5
33	4,7
34	4,8
35	5,0
36	5,1
37	5,3
38	5,4
39	5,6
40	5,8
41	5,9
42	6,1
43	6,2
44	6,4
45	6,5
46	6,7
47	6,8
48	7,0