Apunte Básico de Nivelación
Asignatura: Matemática
Área: Álgebra

Edwars Jiménez, Katherine Matuschka, Maribel Paredes, Francisco Toledo

Índice general

Capítulo 1

Expresiones Algebraicas y Lenguaje Algebraico

Definición 1.0.1. *Una* ***expresión algebraica*** *es una expresión que entrelaza números y letras mediante operaciones aritméticas.*

Ejemplo 1.0.2. *Si x es un número natural, obtenga una expresión algebraica en x para:*

a) *su sucesor.*

Solución. $x+1$.

b) *su doble.*

Solución. $2x$.

c) *su mitad.*

Solución. $\dfrac{x}{2}$.

d) *sus tres cuartas partes disminuidas en una unidad.*

Solución. $\dfrac{3}{4}x-1$.

e) *su triple excedido en 4 unidades.*

Solución. $3x+4$.

f) *su* $20\,\%$.

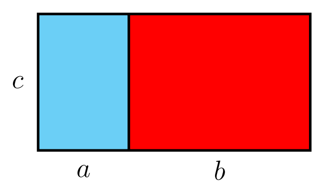
Solución. $\dfrac{x}{5}$.

1.1. Factorización

Definición 1.1.1. ***Factorizar*** *una expresión algebraica correspondiente a la suma y/o diferencia de dos o más términos, consiste en escribirla como producto de expresiones algebraicas más sencillas.*

Veamos algunos casos donde se muestra cómo factorizar de la forma más eficiente posible:

- **Caso 1:** Factor común:



En la figura, vemos que el rectángulo mayor consiste en dos rectángulos, uno de área ac y el otro de área bc. El área total es

$$ac+bc.$$

Sin embargo, notamos que los lados del rectángulo mayor miden $a+b$ y c, por lo tanto su área puede también ser expresada como

$$c(a+b).$$

Es decir,

$$ac+bc=c(a+b) \tag{1.1.1}$$

lo cual no es otra cosa que el axioma correspondiente a la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma. Sin embargo, observándolo desde otra perspectiva, la última igualdad nos plantea que, dado que c se repite en ambos términos de la izquierda, entonces podemos colocar un paréntesis, "sacar" a c de éste, y "dentro" de él dejar los factores de cada término que no se repiten. En este caso, decimos que c es **factor común** del miembro izquierdo de (1.1.1).

Ejemplo 1.1.2. *Factorice:*

a) $abd + acd + ad$.

Solución. En este caso, la expresión tiene factor común ad, por lo que su factorización es

$$ad(b + c + 1),$$

lo cual usted puede comprobar multiplicando ad "hacia dentro" del paréntesis, es decir usando distributividad.

b) $8x + 12y + 20z$.

Solución. La expresión anterior es equivalente a

$$4 \cdot 2x + 4 \cdot 3y + 4 \cdot 5z,$$

por lo que el factor común es 4, y la expresión factorizada queda como

$$4(2x + 3y + 5z).$$

Note que el primer paso no es necesario, dado que 4 es el máximo común divisor entre $8, 12$ y 20, esto quiere decir que es el mayor factor que se puede extraer de estos tres números.

c) $12x^2y^5 + 18x^3y^4 - 24x^6y^3$.

Solución. El máximo común divisor entre 12, 18 y 24 es 6, por lo que 6 es uno de los factores comunes de esta expresión. Sin embargo, no es el único.

Notemos que x^2 es la menor potencia de x presente en algún término de la expresión original. Por otro lado, y^3 es la respectiva menor potencia de y. Dejando un x^2 y un y^3 en cada término, nuestra expresión queda como

$$12x^2y^3y^2 + 18x^2xy^3y - 24x^2x^4y^3. \tag{1.1.2}$$

De este modo, observando (1.1.2), el factor común es $6x^2y^3$. Así, la factorización es

$$6x^2y^3(2y^2 + 3xy - 4x^4).$$

Nos podemos ahorrar el paso (1.1.2), notando que los exponentes de las potencias de x que quedan "dentro" del parentésis, corresponden a restar a cada exponente original, el exponente del factor común en x, análogamente para y.

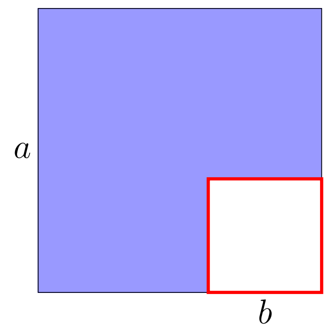
d) $\dfrac{4}{15}x^3y^6z^2 - \dfrac{16}{9}x^2y^4z^3$.

Solución. En este caso, notamos que el MCD (máximo común divisor) entre los numeradores es 4 y el MCD entre los denominadores es 3. De este modo, escogiendo la menor potencia de x, de y y de z presente en la expresión, obtenemos que su factorización es

$$\frac{4}{3}x^2y^4z^2\left(\frac{1}{5}xy^2 - \frac{4}{3}z\right).$$

$\square$

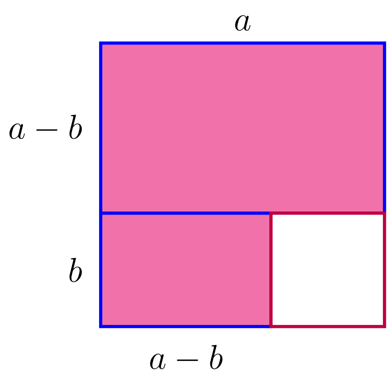
- **Caso 2:** Diferencia de cuadrados:



La figura consiste en dos cuadrados, el más grande tiene lados de medida a unidades, y el más pequeño, tiene lados de medida b unidades. El área de la región achurada corresponde a la diferencia entre el área del cuadrado grande y el área del cuadrado pequeño, es decir, el área es

$$a^2 - b^2.$$

Sin embargo, si separamos la región achurada en dos rectángulos:



vemos que el área del rectángulo superior es $a(a - b)$, y el área del rectángulo inferior es $b(a - b)$. De este modo, el área achurada también corresponde a

$$a(a - b) + b(a - b).$$

Como en esta última expresión $a - b$ es factor común, entonces queda como

$$(a - b)(a + b).$$

Es decir,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Esta igualdad, la podemos interpretar como que la diferencia de los cuadrados de a y b (en ese orden), se puede factorizar como la suma de a con b por la diferencia de a con b, en ese orden. Veamos ejemplos, en los cuales usamos la expresión obtenida:

Ejemplo 1.1.3. *Factorice:*

a) $81x^2 - 16y^2$.

Solución. Podemos expresar esta resta como la diferencia de cuadrados

$$(9x)^2 - (4y)^2,$$

por lo que su factorización es

$$(9x + 4y)(9x - 4y).$$

b) $x^4 - 1$.

Solución. La expresión dada es equivalente a

$$(x^2)^2 - 1^2,$$

por lo que corresponde a

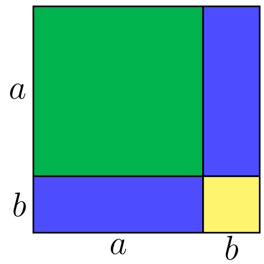
$$(x^2 + 1)(x^2 - 1).$$

Note que el factor $x^2 - 1$ es nuevamente una diferencia de cuadrados, por lo que la factorización final es

$$(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1).$$

□

- **Caso 3:** Trinomio cuadrado perfecto



En la figura, vemos un cuadrado de lado $a+b$, por lo que su área corresponde a

$$(a+b)^2.$$

Sin embargo, esta figura puede ser descompuesta en un cuadrado de lado a, dos rectángulos, cada uno de lados a y b, y un cuadrado de lado b. De este modo, el área de la figura completa también corresponde a la suma de las áreas de las subfiguras mencionadas, es decir a

$$a^2 + ab + ab + b^2,$$

la que puede ser expresada como

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Es decir, obtenemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \tag{1.1.3}$$

Esta igualdad se puede interpretar como que el cuadrado de la suma de a y b corresponde a:

- el primer término al cuadrado, o sea a^2,
- más dos veces el primer por el segundo término, es decir, $2ab$,
- más el segundo término al cuadrado, o sea b^2.

Observación 1.1.1. Un ***error frecuente*** al momento de desarrollar un cuadrado de binomio es, aplicar la potencia a cada término por separado, sumando o restando según el caso, esto es:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

o bien,

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2$$

ESTA AFIRMACIÓN NO SE CUMPLE.

Esta fórmula nos permite calcular potencias tales como 17^2, notando que

$$17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2.$$

O sea,

$$17^2 = 100 + 140 + 49 = 289.$$

Note también que, simplemente multiplicando, podemos obtener que

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2, \tag{1.1.4}$$

expresión que es bastante similar a la del desarrollo de $(a+b)^2$, y que sólo difere de él en el signo del segundo término. Ahora factorizaremos algunos trinomios que son cuadrados perfectos, en virtud de (1.1.3) y (1.1.4).

Ejemplo 1.1.4. *Factorice*

a) $x^2 + 6x + 9$.

Solución. Al observar el primer y último término, notamos que éstos corresponden al cuadrado de x y al cuadrado de 3, respectivamente. Más aún, el término central corresponde a doble de $3x$, por lo que este trinomio corresponde a un cuadrado del binomio y su factorización es

$$(x+3)^2.$$

b) $x^4 - 8x^2 + 16$.

Solución. El primer término corresponde al cuadrado de x^2 y el tercero al cuadrado de 4. Por otro lado, el término central corresponde al opuesto de $2 \cdot 4 \cdot x^2$, por lo que este trinomio corresponde a

$$(x^2-4)^2.$$

Observamos que $x^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados, por lo que la factorización final es

$$(x+2)^2(x-2)^2.$$

Caso 4: Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (algunos casos):

Vemos que al efectuar la multiplicación

$$(x + 5)(x + 4)$$

obtenemos el polinomio

$$x^2 + 9x + 20,$$

donde el coeficiente de x, el cual es 9, corresponde a la suma $5 + 4$, y el término independiente de x, el cual es 20, corresponde al producto $5 \cdot 4$.

En general, si queremos factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, de modo que quede expresado de la forma

$$(x + e)(x + f),$$

entonces debemos encontrar los números e y f de modo que su multiplicación corresponda a c (el término independiente de x), y su suma corresponda a b (el coeficiente de x).

Ejemplo 1.1.5. *Factorice:*

a) $x^2 + 5x + 6$.

   Solución. Debemos encontrar dos números que multiplicados nos dé 6, y que sumados nos dé 5. Estos números son 2 y 3, por lo que su factorización es

$$(x + 2)(x + 3).$$

b) $x^2 + 5x - 6$.

   Solución. Debemos encontrar dos números que multiplicados nos dé -6 y que sumados nos dé 5. Estos son 6 y -1, por lo que su factorización es

$$(x + 6)(x - 1).$$

c) $x^2 - 17x + 60$.

Solución. Debemos encontrar dos números que multiplicados nos dé 60 (como 60 es positivo, los números que buscamos deben ser del mismo signo) y sumados nos dé -17 (entonces ambos deben ser negativos). Estos son -12 y -5, por lo que factorización es

$$(x-5)(x-12).$$

$\square$

Observación 1.1.2. Al realizar la factorización de la forma:

$$x^2 + bx + c = (x+e)(x+f)$$

los signos de e y f dependen de los signos de c y b:

- Si $c > 0$ entonces e y f son ambos positivos o ambos negativos. Si b es positivo, son ambos positivos, pero si b es negativo, son ambos son negativos.
- Si $c < 0$ entonces e y f son de distinto signo. Si b es positivo, entonces el mayor entre e y f es positivo. Por el contrario si b es negativo, entonces el mayor entre e y f será negativo.

Caso 5: Trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y $a \neq 1$ (algunos casos): Veamos inmediatamente un ejemplo:

Ejemplo 1.1.6. *Factorice el trinomio* $4x^2 + 7x - 2$.

Solución. Para factorizar este trinomio, en primer lugar, lo multiplicamos y dividimos por 4, el cual es el coeficiente de x^2. De este modo,

$$4x^2 + 7x - 2 = \frac{16x^2 + 28x - 8}{4}$$

El numerador del miembro derecho, lo expresamos como un trinomio de la variable $4x$, quedando como

$$\frac{16x^2 + 28x - 8}{4} = \frac{(4x)^2 + 7(4x) - 8}{4}$$

y luego lo factorizamos como tal. Para tal efecto, buscamos dos números que multiplicados nos dé como resultado -8 y que sumados nos dé 7, los cuales son 8 y -1. De este modo, la factorización es

$$\frac{(4x)^2 + 7(4x) - 8}{4} = \frac{(4x+8)(4x-1)}{4} \tag{1.1.5}$$

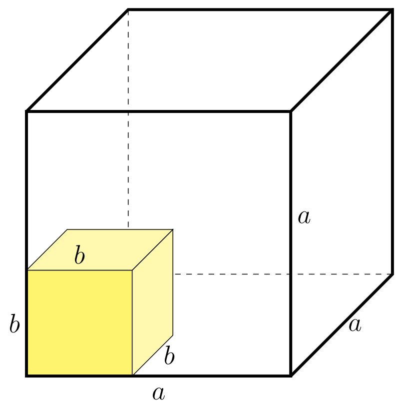
Por lo tanto, de las igualdades anteriores se deduce que

$$4x^2 + 7x - 2 = \frac{(4x+8)(4x-1)}{4} = \frac{4(x+2)(4x-1)}{4} = (x+2)(4x-1).$$

□

Observación 1.1.3. Consideremos un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y $a \neq 1$. Para factorizarlo, en caso que sea posible, en primer lugar lo multiplicamos y dividimos por el coeficiente de x^2, es decir por a. En segundo lugar, formamos un trinomio de la variable ax en el numerador, el cual factorizamos. Finalmente, extraemos factores comunes del numerador, de modo que el a del denominador se cancele, obteniendo la factorización final.

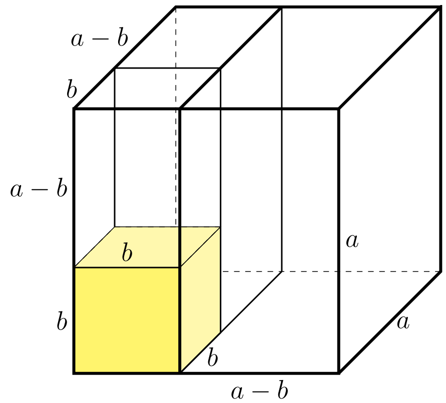
- **Caso 6:** Diferencia y suma de cubos:



En la figura podemos apreciar un cubo de arista a unidades, y dentro de él, un cubo más pequeño de arista b unidades. Si queremos obtener el volumen del sólido achurado, entonces éste corresponde al volumen del cubo mayor menos el volumen del cubo menor, es decir, su volumen corresponde a

$$a^3 - b^3.$$

Sin embargo, también podemos obtener este volumen, separando la región en 3 paralelepípedos:



Note que

- el paralelepípedo de la derecha, tiene volumen $a^2(a-b)$.
- el paralelepípedo de la izquierda y adelante, tiene volumen $b^2(a-b)$.
- el paralelepípedo de la izquierda y atrás, tiene volumen $ab(a-b)$.

De este modo, el volumen del cubo también puede ser expresado como

$$a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b). \tag{1.1.6}$$

Como en (1.1.6), $a-b$ es factor común, entonces esta expresión queda como

$$(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Es decir, obtenemos la igualdad

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2), \tag{1.1.7}$$

la cual nos dice que la factorización de la diferencia entre el cubo de a y el cubo de b, corresponde a la diferencia entre ambos términos a y b, multiplicada por un trinomio consistente en el cuadrado del primer término, es decir a^2, más el producto de ambos términos a y b, y más el cuadrado del segundo término, es decir b^2.

Queremos factorizar $a^3 + b^3$. Note que

$$a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3,$$

por lo que $a^3 + b^3$ se puede entender como una diferencia de cubos. De este modo, como

$$a^3 - (-b)^3 = (a - (-b))(a^2 + a(-b) + (-b)^2),$$

entonces

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \tag{1.1.8}$$

Comparando (1.1.8) con (1.1.7), vemos que cuando factorizamos la suma de cubos $a^3 + b^3$, en el primer factor hay una suma $a + b$, y el segundo factor $a^2 - ab + b^2$ tiene segundo término negativo. En cambio en la diferencia de cubos $a^3 - b^3$, en el primer factor hay una diferencia $a - b$, y el segundo factor $a^2 + ab + b^2$ tiene segundo término positivo.

Ejemplo 1.1.7. *Factorice:*

a) $x^3 + 27$.

   Solución. Note que la expresión dada corresponde a la suma del cubo de x con el cubo de 3. De este modo, su factorización es

$$(x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

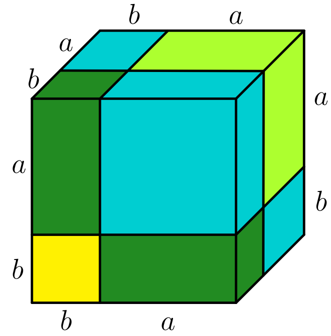
b) $x^3 - 1$.

Solución. Note que la expresión dada corresponde a la diferencia entre el cubo de x y el cubo de 1. De este modo, su factorización corresponde a

$$(x-1)(x^2+x+1).$$

$\square$

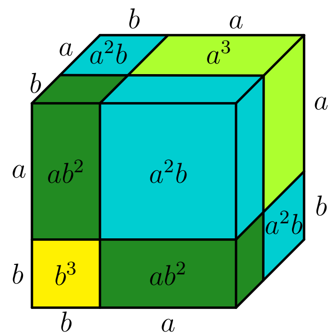
- **Caso 7:** Polinomio cubo perfecto



En la figura, observamos un cubo cuya arista mide $a+b$. De este modo, su volumen es

$$(a+b)^3.$$

Sin embargo, este cubo puede ser descompuesto en cubos y paralelepípedos:



los cuales son:

- el cubo de atrás, el cual tiene volumen a^3.

- los tres paralelepípedos, cada uno de volumen a^2b.
- los tres paralelepípedos, cada uno de volumen ab^2.
- el cubo de adelante, el cual tiene volumen b^3.

De este modo, tenemos que el volumen del cubo completo, también puede ser expresado como

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

por lo que obtenemos la igualdad

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

En esta expresión, a la derecha tenemos que

- En los términos que están en los extremos aparece cada término al cubo, en este caso a^3 y b^3.
- Las potencias del primer término, en este caso a, van decreciendo de izquierda a derecha.
- Las potencias del segundo término, en este caso b, van creciendo de izquierda a derecha.
- Los términos centrales tienen coeficiente 3.

Note también que, simplemente realizando la multiplicación, obtenemos que

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Esta última expresión tiene un desarrollo muy similar al de $(a+b)^3$, pero difiere de él en el hecho que los signos $+$ y $-$ de los coeficientes van apareciendo en forma alternada, partiendo por $+$. Factorizamos ahora algunas expresiones que son cubos perfectos.

Ejemplo 1.1.8. *Factorice:*

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Solución. Vemos que los términos ubicados en los extremos corresponden al cubo de x y al cubo de 2. Los términos centrales corresponden a $3 \cdot 2 \cdot x^2$ y $3 \cdot 2^2 \cdot x$ respectivamente. De este modo, la expresión es el cubo perfecto

$$(x+2)^3.$$

b) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Solución. Los términos ubicados en los extremos corresponden al cubo de x y al cubo de 1. Los términos centrales corresponden a $3 \cdot 1 \cdot x^2$ y $3 \cdot 1^2 \cdot x$ respectivamente. Los signos de los coeficientes se presentan en forma alternada, partiendo por $+$. De este modo, la expresión corresponde al cubo del binomio

$$(x-1)^3.$$

$\square$

Observación 1.1.4. Un ***error frecuente*** al momento de desarrollar un cubo de binomio es, aplicar la potencia a cada término por separado, sumando o restando según el caso, esto es:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3$$

o bien,

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3$$

ESTA AFIRMACIÓN NO SE CUMPLE.

1.2. Operaciones con fracciones algebraicas.

1.2.1. Suma y resta de fracciones algebraicas.

Para sumar o restar dos fracciones algebraicas con distinto denominador, transformamos primero ambas fracciones en fracciones que tengan el mismo denominador y luego operamos, tal como lo hicimos con las fracciones numéricas.

Ejemplo 1.2.1. *Realice la suma*

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+3}, \quad x \neq \pm 3$$

Solución. Queremos obtener fracciones equivalentes a cada uno de los sumandos, de modo que estas nuevas fracciones tengan el mismo denominador. El denominador común escogido será simplemente el producto de los denominadores, es decir $(x-3)(x+3)$. Note que

$$\frac{2}{x-3}=\frac{2}{x-3}\cdot\frac{x+3}{x+3}=\frac{2(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{2x+6}{x^2-9}$$

y

$$\frac{3}{x+3}=\frac{3}{x+3}\cdot\frac{x-3}{x-3}=\frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\frac{3x-9}{x^2-9}$$

De este modo,

$$\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x+3}=\frac{2x+6}{x^2-9}+\frac{3x-9}{x^2-9}=\frac{5x-3}{x^2-9}.$$

□

Veamos otro ejemplo

Ejemplo 1.2.2. *Obtenga la resta*

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

Solución. Queremos que ambas fracciones que se resten tengan el mismo denominador. Para tal efecto, dejamos ambas fracciones con denominador $(x-1)^2$ (que en este caso, es aquel denominador que tiene mayor exponente). Es decir, es sólo necesario transformar la primera fracción en una fracción equivalente. En efecto,

$$\frac{2}{x-1}=\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{2x-2}{(x-1)^2}$$

De este modo,

$$\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{2x-3}{(x-1)^2}$$

□

1.2.2. Multiplicación y división de fracciones algebraicas.

Para multiplicar o dividir fracciones algebraicas, se procede de la misma forma que se realizan estas operaciones con fracciones numéricas. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.2.3. *Opere las siguientes fracciones algebraicas, y simplique lo más posible cada expresión obtenida:*

a) $\dfrac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\dfrac{2}{x-1},\ x\neq\pm1.$

Solución. Antes de multiplicar, factorizamos el numerador y denominador de cada fracción, según sea necesario. Para factorizar $3x^2-2x-1$, lo multiplicamos y dividimos por 3, obteniendo finalmente que

$$3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1).$$

Así, nuestra multiplicación queda como

$$\frac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{(x-1)(3x+1)}{4(x+1)}\cdot\frac{2}{x-1}.$$

Multiplicamos ahora numerador con numerador, y denominador con denominador, tal como en las fracciones numéricas, obteniendo que

$$\frac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{2(x-1)(3x+1)}{4(x+1)(x-1)}$$

Note que tanto en el numerador como en el denominador dejamos expresada la multiplicación, para luego poder simplificar los factores repetidos. Así,

$$\frac{3x^2-2x-1}{4x+4}\cdot\frac{2}{x-1}=\frac{2(x-1)(3x+1)}{4(x+1)(x-1)}=\frac{3x+1}{2(x+1)}=\frac{3x+1}{2x+2},$$

donde la última fracción es irreducible, es decir, no tiene factores comunes en el numerador y denominador.

b) $\dfrac{\frac{36}{x^2}}{\frac{x^3}{48}},\ x\neq0.$

Solución. Procedemos con esta división igual que con fracciones numéricas. Tenemos que

$$\frac{\frac{36}{x^2}}{\frac{x^3}{48}} = \frac{36}{x^2} \cdot \frac{x^3}{48}.$$

Dado que al efectuar la multiplicación de la derecha se simplificarán los factores comunes que aparecen "arriba" y "abajo" en la fracción resultante, entonces podemos simplificar cruzado antes de realizar tal multiplicación, y luego la hacemos. Así

$$\frac{\frac{36}{x^2}}{\frac{x^3}{48}} = \frac{36}{x^2} \cdot \frac{x^3}{48} = \frac{2}{1} \cdot \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}.$$

1.3. Ejercicios Propuestos

1. Si x es un número natural, obtenga:

    a) su antecesor.

    b) su triple.

    c) su tercera parte.

    d) su mitad disminuidas en una unidad.

    e) la mitad de su antecesor.

    f) su 25 %.

2. Si Daniela tiene x años, obtenga

    a) La edad que tendrá en 4 años más.

    b) La edad que tenía hace 4 años.

    c) Los años que le faltan para tener la edad de su padre, el cual tiene 47 años.

    d) Los años que le faltan a su hijo para tener la edad de Daniela, considerando que este tiene 7 años.

e) La edad de su abuela, la cual excede al doble de la edad de Daniela en 20 años.

f) La edad de su primo, sabiendo que la mitad de la edad de Daniela la excede en 3 años.

g) Los meses que ha vivido, si hoy cumplió x años.

3. Factorize, si es posible, las siguientes expresiones algebraicas:

a) $abcd + acde + adef$

b) $x^2 + 3x^3 - 2x^4$

c) $18x + 24y - 30z$

d) $10x^3y^4 - 15x^2y^5 - 20x^5y^7$

e) $xz - yz + xw - yw$

f) $\frac{5}{14}x^3 - \frac{10}{21}x^2 + \frac{20}{7}x^4$

g) $x^4 - y^4$

h) $144x^6 - 81y^2$

i) $36x^4 - 169y^8$

j) $x^6 - 1$

k) $12x^8 - 48x^6$

l) $x^2 + 7x + 10$

m) $x^2 - 14x + 49$

n) $x^2 - x - 12$

ñ) $x^2 + 7x - 60$

o) $x^2 - 5x + 6$

p) $x^2 - x - 6$

q) $x^2 + x - 6$

r) $9x^2 + 8x - 1$

s) $5x^2 - 13x + 6$

t) $6x^2 + x - 2$

u) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

v) $x^4 + 8x^2 + 16$

w) $x^3 - 3x^2 - 54x$

x) $81x^3 - 1$

y) $8 + 64y^6$

z) $\dfrac{1}{27}x^9 - \dfrac{1}{125}y^{12}$

a2) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

b2) $x^3 + 9x^2 + 27x + 81$

4. Realize las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x+1}$

b) $2 - \dfrac{1}{4 - x^2}$

c) $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^2}$

d) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x}{x+1}$

e) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$

f) $\dfrac{4}{x^2-25} + \dfrac{x+2}{x^2-2x-15}$

g) $\dfrac{x}{x^2+x-2} - \dfrac{3}{x^2+2x-3} - \dfrac{x}{x^2+5x+6}$

h) $\dfrac{1}{x^4-2x^3+x^2} + \dfrac{1}{x^3(x+1)}$

5. Simplifique, si es posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$

b) $\dfrac{x^4+x^2}{x^2}$

c) $\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-9}$

d) $\dfrac{9-x^2}{x^2-6x+9}$

e) $\dfrac{1-x^3}{x^2-3x+2}$

6. Racionalize las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}}$

c) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^4-1}}$

e) $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}$

f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

g) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

Capítulo 2

Ecuaciones

Definición 2.0.1. *Una **ecuación** es una igualdad en la que intervienen una o más incógnitas. El **grado** de una ecuación consiste en el mayor exponente al que se encuentra elevada cualquiera de las incógnitas.*

Estudiaremos las ecuaciones de primer y de segundo grado y sistemas de ecuaciones cuyas incógnitas son un número real:

2.1. Ecuaciones Lineales

Definición 2.1.1. *Sean a y b números reales, con $a \neq 0$. Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma*

$$ax + b = 0.$$

Ejemplo 2.1.2. *Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:*

a) $2x + 1 = 5$.

Solución. Intentamos despejar la incógnita x. Para ello, cada operación que realizamos, la hacemos en ambos miembros de la igualdad, de modo que ésta se mantenga (formalmente, lo que en realidad haremos es usar la propiedad 3.4 y 3.5 de números reales). Esto es como una balanza en equilibrio: si colocamos peso en un platillo, entonces debemos colocar el mismo peso en el otro platillo, de modo que el equilibrio se mantenga.

De este modo, restamos 1 en ambos miembros de la ecuación, obteniendo

$$2x = 4.$$

Dividimos por 2 en ambos miembros de la última igualdad, de este modo

$$x = 2.$$

Note que si reemplazamos $x = 2$ en la ecuación original, obtenemos que

$$2x + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,$$

lo cual comprueba que nuestra solución es correcta (la comprobación de todos modos no es necesaria). Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{2\}$. $\square$

b) $5x + 5 = 9 - 3x$.

Solución. Para despejar x, primero agrupamos los términos que dependan de x en un miembro de la igualdad, y los términos que no dependen de x en el otro miembro.

Sumamos $3x - 5$ en ambos miembros, lo que se puede interpretar como que $3x$ "pasa sumando" al miembro izquierdo, y 5 "pasa restando" al miembro derecho. De este modo, obtenemos la ecuación equivalente

$$5x + 3x = 9 - 5,$$

de donde

$$8x = 4.$$

Dividimos ambos miembros de la última igualdad por 8, lo que se puede entender como que 8 pasa dividiendo al miembro derecho de la igualdad, obteniendo que

$$x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

De este modo, el conjunto solución es $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $2x-(x-(x-50))=x-(800-3x)$.

Solución. Intentamos deshacer los paréntesis para luego despejar x. Si hay un signo menos justo fuera de un paréntesis, esto significa que éste se esta multiplicando por -1, luego usando la distributividad, este -1 multiplica a todos los términos que están dentro del paréntesis, cambiando los signos de éstos. De este modo, en un primer paso obtenemos

$$2x-(x-x+50)=x-800+3x.$$

Luego,

$$2x-50=4x-800.$$

Así, dejando los términos en x a la derecha, los números a la izquierda, operando y luego permutando la igualdad, obtenemos que

$$2x=750,$$

de donde

$$x=375.$$

Por lo tanto, $S=\{375\}$.

d) $\dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2-4x}{3}=\dfrac{-5x-4}{14}+\dfrac{7x}{6}$.

Solución. Intentamos deshacernos de las fracciones lo antes posible. Para tal efecto, no es necesario operar con ellas, simplemente multiplicamos la ecuación por el MCM de los denominadores, esto es, por 42. De este modo, obtenemos que

$$6(3x+1)-14(2-4x)=3(-5x-4)+7\cdot 7x.$$

Usando distributividad, obtenemos ahora que

$$18x+6-28+56x=-15x-12+49x.$$

Despejamos x, obteniendo que

$$x = \frac{1}{4}.$$

Es decir, $S = \{\frac{1}{4}\}$. $\square$

Veamos un ejemplo de aplicación de las ecuaciones lineales:

Ejercicio 2.1.1. *Andrés fue al mall y se compró un traje, un sombrero y un libro. El libro le costó \$20000 menos que el traje y el sombrero le costó \$5000 más que el libro. Si pagó \$88000 por los tres artículos, ¿cuánto pagó por cada artículo?*

Escogemos como x como el precio del traje.

a) *Determine el precio del libro, en términos de x.*

Solución. $x - 20000$ pesos.

b) *Determine el precio del sombrero, en términos de x.*

Solución. $x - 20000 + 5000$, o sea, $x - 15000$ pesos.

c) *Resuelva el problema.*

Solución. En base a lo obtenido en *a*) y en *b*), tenemos que la ecuación que resuelve este problema es

$$x + (x - 20000) + (x - 15000) = 88000,$$

de la cual se deduce que $x = 41000$. Es decir, el traje le costó \$41000, el libro

$$\$41000 - \$2000 = \$21000,$$

y el sombrero

$$\$41000 - \$15000 = \$26000.$$

$\square$

2.2. Ecuaciones Cuadráticas

Definición 2.2.1. *Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Una* ***ecuación cuadrática*** *es una ecuación de la forma*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Proposición 2.2.2. *Sean x e y números reales. Se tiene que*

$$xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ y = 0.$$

Observación 2.2.1. Es decir, el producto de dos números reales es 0, si y sólo si, al menos uno de ellos es 0.

Ejemplo 2.2.3. *Considere la ecuación cuadrática*

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Al factorizar su miembro izquierdo, obtenemos la ecuación equivalente

$$(x - 3)(x - 2) = 0.$$

a) *Observando esta última ecuación ¿qué podemos concluir acerca de $x - 3$ y $x - 2$?*

Solución. Como $(x-3)(x-2) = 0$, entonces de la última proposición obtenemos que

$$x - 3 = 0 \ \vee \ x - 2 = 0.$$

b) *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$?*

Solución. De a), tenemos que

- si $x - 3 = 0$, entonces $x = 3$.
- si $x - 2 = 0$, entonces $x = 2$.

De este modo, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{2, 3\}$. $\square$

Ejemplo 2.2.4. *Considere la ecuación*

$$x^2 - 9x - 84 = 0.$$

Resuélvala usando factorización y la última proposición.

Solución. Note que

$$\begin{aligned} x^2 - 8x - 84 = 0 &\Leftrightarrow (x-14)(x+6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 14 = 0 \ \vee \ x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 14 \ \vee \ x = -6. \end{aligned}$$

De este modo, su conjunto solución es $S = \{-6, 14\}$. □

Veamos ecuaciones cuadráticas, para las cuales el coeficiente de x^2 no es 1. ¿Cómo resolverlas?

Ejemplo 2.2.5. *Considere la ecuación cuadrática*

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Si multiplicamos por 2 esta ecuación, obtenemos la ecuación equivalente

$$(2x)^2 - 3(2x) - 10 = 0.$$

a) *Si hacemos el cambio de variable $u = 2x$ ¿que ecuación obtenemos?*

   Solución. Obtenemos la ecuación

$$u^2 - 3u - 10 = 0.$$

b) *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación obtenida en a)?*

   Solución. Factorizando en la última ecuación, obtenemos que sus soluciones son $u = 5$ o $u = -2$.

c) *Deshaciendo el cambio de variable en las soluciones obtenidas en b), ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x - 5 = 0$?*

Solución. Note que

- Si $u = 5$, entonces $2x = 5$, de donde $x = \frac{5}{2}$.
- Si $u = -2$, entonces $2x = -2$, de donde $x = -1$.

Por lo tanto, $S = \{-1, \frac{5}{2}\}$. □

Ejemplo 2.2.6. *Considere la ecuación*

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

Resuélvala usando un cambio de variable.

Solución. Multiplicando por 3 la ecuación, obtenemos

$$(3x)^2 - 2(3x) - 15 = 0.$$

Luego, si hacemos $u = 3x$, obtenemos la ecuación

$$u^2 - 2u - 15 = 0.$$

Si factorizamos en la ecuación anterior, vemos luego que sus soluciones son $u = 5$ o $u = -3$. De este modo, deshaciendo la sustitución, obtenemos que

$$3x = 5 \ \vee \ 3x = -3,$$

de donde

$$x = \frac{5}{3} \ \vee \ x = -1,$$

es decir, $S = \left\{\frac{5}{3}, -1\right\}$. □

Teorema 2.2.7. *Sean a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Las soluciones de la ecuación cuadrática*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2.1}$$

vienen dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.2.2}$$

De este modo

- *si* $b^2 - 4ac > 0$, *entonces la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas, las cuales son*

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ \vee \ x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- *si* $b^2 - 4ac = 0$, *entonces la ecuación cuadrática tiene una única solución real, la cual es*

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

- *si* $b^2 - 4ac < 0$, *entonces la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.*

Observación 2.2.2. La expresión $b^2 - 4ac$ recibe el nombre de **discriminante** de (2.2.1).

Ejemplo 2.2.8. *La temperatura* T *a la que hierve el agua, depende de su altura* h *con respecto al nivel de mar. Las magnitudes* h *y* T *están vinculadas por la fórmula*

$$h = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2 \tag{2.2.3}$$

para $95 \leq T \leq 100$. *¿Cuál es la temperatura a la que hierve el agua en la cima del monte Everest, esto es, a 8840 metros de altura? Use calculadora.*

Solución. En este caso, en virtud de la relación (2.2.3), debemos resolver la ecuación

$$580(100 - T)^2 + 1000(100 - T) = 8840.$$

Hacemos el cambio de variable $u = 100 - T$, obteniendo

$$580u^2 + 1000u - 8840 = 0,$$

la cual es equivalente a

$$29u^2 + 50u - 442 = 0.$$

En esta última ecuación, $a = 29$, $b = 50$ y $c = -442$. De este modo, usando la fórmula (2.2.2), tenemos que sus soluciones son

$$u = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 29 \cdot 442}}{58}.$$

O sea, usando calculadora,

$$u \approx 3{,}13 \text{ o } u \approx -4{,}86.$$

Haciendo $100 - T = u$, obtenemos que

$$T \approx 96{,}87 \text{ o } T \approx 104{,}86.$$

Como el modelo planteado es para $95 \leq T \leq 100$, entonces, en la cima del monte Everest, el agua hierve a casi 97 grados Celsius. □

2.3. Sistemas de Ecuaciones

En esta sección estudiaremos cómo resolver sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, donde estas ecuaciones son de primer grado. Posteriormente resolveremos algunas aplicaciones de éstos. Ejemplos de estos sistemas son

- $\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ cuya solución única es $x = 1$ e $y = 2$.
- $\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x - 2y = 4 \end{cases}$ el cual no tiene solución.
- $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$ el cual tiene infinitas soluciones.

Nuestra pregunta es, ¿cómo resolver este tipo de sistemas de ecuaciones?

Ejemplo 2.3.1. *Considere el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

a) *Para resolverlo, intentaremos eliminar una de las variables, en este caso y. Para ello, multiplicamos la primera ecuación por un número, de modo que al sumar ambas ecuaciones, la variable y se cancele, ¿por cuál número multiplicamos la primera ecuación para que ocurra esto?*

Solución. Por 2, ya que de este modo, el sistema queda como

$$\begin{cases} 2x - 2y = -2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Al sumar estas ecuaciones, se cancela y, y nos queda la ecuación $5x = 5$.

b) *Determine la solución de este sistema.*

Solución. Como de a) tenemos que $5x = 5$, entonces $x = 1$. Luego, reemplazando $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de y. En efecto, si reemplazamos $x = 1$ en la primera ecuación $x - y = -1$, obtenemos que $y = 2$. De este modo, la solución es $x = 1$ e $y = 2$. Podemos expresar la solución como un par ordenado (x, y), de modo que el conjunto solución es

$$S = \{(1, 2)\}.$$

Ejemplo 2.3.2. *Considere el sistema*

$$\begin{cases} 6x + 5y = -1 \\ 4x + 9y = 5 \end{cases}$$

a) *Para resolverlo, intentaremos eliminar la variable x. En este caso, multiplicamos la primera ecuación por un número y la segunda ecuación por otro número, de modo que al sumar ambas ecuaciones se eliminen las x. ¿Cuáles son esos números?*

Solución. El coeficiente de x en cada ecuación, debe ser un múltiplo común de 6 y 4, pero con distinto signo. Como $mcm(6,4) = 12$, entonces multiplicamos por -2 la primera ecuación y por 3 la segunda ecuación, obteniendo el sistema equivalente

$$\begin{cases} -12x - 10y = 2 \\ 12x + 27y = 15 \end{cases}$$

de donde al sumar sus ecuaciones obtenemos que $17y = 17$.

b) *Obtenga la solución de este sistema.*

Solución. De a), obtuvimos la ecuación $17y = 17$, de la cual se deduce que $y = 1$. Al reemplazar $y = 1$ en la primera ecuación del sistema original, obtenemos que $x = -1$. Así, $S = \{(-1,1)\}$. $\square$

Ejemplo 2.3.3. *Obtenga la solución del sistema*

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ -2x - 2y = 4. \end{cases}$$

Solución. Si multiplicamos por 2 la primera ecuación, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ -2x - 2y = 4. \end{cases}$$

Al sumar ambas ecuaciones de este nuevo sistema, obtenemos que $0 = 2$, lo cual es falso, de este modo el sistema no tiene solución. Es decir, su conjunto solución es $S = \emptyset$.

$\square$

Ejemplo 2.3.4. *Resuelva el sistema*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \\ -2x - 2y = -2 \end{cases}$$

Solución. Multiplicando por 2 la primera ecuación y luego sumando ambas ecuaciones, obtenemos que $0 = 0$. Como esta igualdad es evidentemente válida, entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Para obtener algunas de ellas, consideremos que $x = t$, con t un número real cualquiera. Reemplazando $x = t$ en la primera ecuación, tenemos que

$$t + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - t. \tag{2.3.1}$$

De este modo, podemos obtener algunas soluciones particulares, dándole valores a t, y obteniendo el respectivo valor de x e y. En efecto, usando (2.3.1), tenemos que

- si $t = 1$, entonces $x = 1$ e $y = 0$.
- si $t = 4$, entonces $x = 4$ e $y = -3$.

De este modo, el conjunto solución es

$$S = \{(t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Veamos un ejemplo de aplicación de los sistemas de ecuaciones:

Ejercicio 2.3.1. *Hay varios conejos y jaulas. Si colocamos un conejo por cada jaula, sobra un conejo. Si colocamos dos conejos por cada jaula, sobra una jaula. ¿Cuántos conejos y jaulas hay?*

Solución. Sean x el número de conejos e y el número de jaulas. El hecho de que al colocar un conejo por cada jaula, sobra un conejo, nos dice que hay 1 conejo más que jaulas, por lo que la primera ecuación es

$$x - y = 1. \tag{2.3.2}$$

El hecho de que al colocar dos conejos por jaula, sobra una jaula, nos dice que hay una jaula más que la mitad de los conejos, por lo que la segunda ecuación es

$$y - \frac{x}{2} = 1, \tag{2.3.3}$$

la cual es equivalente a

$$2y - x = 2. \tag{2.3.4}$$

De este modo, resolvemos el sistema de las ecuaciones (2.3.2) y (2.3.4), es decir, el sistema

$$x - y = 1, \ -x + 2y = 2.$$

Para ello, usaremos un método distinto al como hemos resuelto los sistemas anteriores. Esta vez despejaremos una incógnita de algunas de las ecuaciones y la reemplazaremos en la otra ecuación. En este caso, despejamos x de la primera ecuación, obteniendo que $x = 1 + y$. Reemplazamos esta expresión en $-x + 2y = 2$, obteniendo que

$$-(1 + y) + 2y = 2.$$

Resolviendo esta ecuación de primer grado, concluimos que $y = 3$. De este modo, $x = 1 + y = 1 + 3 = 4$. Por lo tanto, hay 4 conejos y 3 jaulas. □

2.4. Ejercicios Propuestos

1. Obtenga, si es que existe, el valor de x que satisface la ecuación

   a) $2x + 1 = \frac{3}{2}$

   b) $2x + 1 = 2x$

   c) $3x - 4 = 2\left(\frac{x}{4} + 7\right) + x$

   d) $x - \left(\frac{x}{2} - (2 + x)\right) = 1 - (1 - 4x)$

   e) $\frac{x}{8} - \frac{x+30}{16} + \frac{14-x}{12} = -\left(1 - \frac{1}{4}\right)$

   f) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{1+x}} = -3$

2. Considere los siguientes sistemas de ecuaciones:

   a) $x - y = -3, \ 5x + y = 27$

b) $5x + y = 27, \ x + 2y = 0$

c) $x - 2y = 0, \ 2x + y = -15$

d) $2x + 6y = 2, \ -x - 3y = 0$

e) $x + 2y = 4, \ -2x - 8y = -8$

f) $4x + 6y = 6, \ 6x + 4y = 14$

Resuélva cada uno de ellos:

a) multiplicando una o ambas ecuaciones por un cierto número, y luego eliminando una de las incógnitas.

b) despejando una incógnita de una ecuación y reemplazándola en la otra.

3. Resuelva los siguientes problemas, planteando y resolviendo una ecuación o un sistema de ecuaciones:

   a) Un número más su quinta parte suman 18. ¿Cuál es el número?

   b) Tres números consecutivos suman 444. ¿Cuáles son los números?

   c) Necesitamos repartir 27 naranjas en 2 cajas, de modo que dada la capacidad de ellas, caben 3 naranjas más en la segunda caja que en la primera caja. ¿Cuántas naranjas debería ir en cada caja?

   d) Don Raúl tuvó su primer hijo cuando tenía 24 años, al segundo cuando tenía 28 años y al tercero cuando tenía 32 años. Si las edades de sus tres hijos suman 36 años. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y de sus hijos?

   e) Carlos y María José juntaron \$74000 para salir de paseo por el fin de semana largo. María José puso \$7000 menos que Andrés. ¿Cuánto dinero aportó cada uno?

   f) Tengo 120 animales en mi granja, entre cerdos, ovejas y vacas en mi granja. Las ovejas son 20 más que los cerdos, y las vacas son 5 más que las ovejas. ¿Cuántas ovejas, vacas y cerdos hay?

g) En la billetera de Elisa hay 62 billetes, entre billetes de \$5000, \$2000 y \$1000. Ella tiene el doble de billetes de \$5000 que de \$2000 y los billetes de \$1000 son dos más que los billetes de \$5000. ¿Cuántos de cada tipo de billete hay?

h) En un cajón tengo naranjas, manzanas y plátanos. Si hay el doble de manzanas que de naranjas, y el doble de plátanos que de manzanas. Si en total tengo 126 frutas, ¿cuántas frutas de cada tipo hay?

i) La edad de Pedro es el doble de la edad de María. Si en 5 años más sus edades sumarán 43 años, ¿cuáles son sus edades actuales?

j) En el garaje de una fábrica de respuestos de transporte, hay 110 vehículos entre autos y motos. Si las ruedas suman 360, ¿cuántos autos y motos hay?

k) Andrea a rendir una prueba para ingresar a la PDI, la cual consiste en 20 preguntas. Por cada respuesta correcta se le asignan 3 puntos, y por cada respuesta incorrecta se le restan 2 puntos. ¿Cuántas respuestas acertó, si obtuvo un puntaje de 30 puntos?

l) Para la rendición de la PSU en un liceo, se regalaron 96 lápices, los cuales se dividen entre lápices pasta y lápices gráfito. Si cada lápiz pasta costó \$800 y cada lápiz gráfito costó \$650, obtenga una expresión para el costo total de los lápices. Si el costo total fue de \$69300, ¿cuántos lápices de cada tipo se regalaron?

m) El asaltante de un banco arranca en un automóvil, a una rapidez promedio de $60\frac{km}{h}$. A las 2 horas, lo empieza a perseguir un auto policial, el cual va a una rapidez promedio de $100\frac{km}{h}$. ¿Al cuánto tiempo de partir, la policía alcanzará al asaltante?

4. Para cada una de las siguientes expresiones, determine qué valor se le debería sumar para que corresponda a un cuadrado del binomio, e indique cuál sería tal cuadrado del binomio.

a) $x^2 + 2x$

b) $x^2 + 10x$

c) $x^2 - 8x$

d) $x^2 - 4x$

e) $x^2 - x$

f) $x^2 + 14x$

g) $x^2 - 18x$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas,

   7.1) Usando factorización, cambio de variable y o completación de cuadrado, según sea el caso.

   7.2) Usando la fórmula de la solución de una ecuación cuadrática.

   a) $x^2 - 169 = 0$

   b) $x^2 + x = 0$

   c) $x^2 - 13x + 36 = 0$

   d) $x^2 + 400 = 0$

   e) $x^2 - 2x - 35 = 0$

   f) $x^2 + 2x - 35 = 0$

   g) $4x^2 - 20x = 24$

   h) $x^2 - x - 6 = 0$

   i) $x^2 = 108 - 3x$

   j) $2x^2 - x - 1 = 0$

   k) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

   l) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

   m) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

6. Determine para qué valores de α en $\mathbb{R}$, la ecuación cuadrática $x^2 - 4x + \alpha^2 = 0$ tiene una única solución real.