Apunte Básico de Nivelación
Asignatura: Matemática
Área: Geometría

Edwars Jiménez, Katherine Matuschka, Maribel Paredes, Francisco Toledo

8 de abril de 2020

Índice general

Capítulo 1

Conceptos iniciales

La Geometría clásica se inicia con tres conceptos fundamentales, los cuales son los "ladrillos" con los que se construye toda esta teoría. Estos conceptos son **punto**, **recta** y **plano**. Definiremos a continuación, de forma intuitiva, cada uno de ellos.

- Punto:

Intuitivamente, un punto corresponde a la huella que deja un lápiz, la punta de de un álfiler, o porque no una estrella vista desde la Tierra. Los puntos se denotan con letras mayúsculas. El punto de la figura se denota como punto A.

- Recta:

Intuitivamente, una recta es un conjunto infinito de puntos, el cual se extiende ilimitadamente en una misma dirección, y en ambos sentidos. Dados dos puntos distintos A y B, existe una única recta que los contiene. Esta recta se denota por $\overleftrightarrow{AB}$.

- Plano:

Intuitivamente, un plano es como una hoja de papel de dimensiones infinitas. Un plano puede denotarse por una sóla letra. En el caso del dibujo, este es el plano P.

Continuaremos este capítulo, definiendo algunos conceptos adicionales. Estos son **segmento**, **rayo** y **ángulo**:

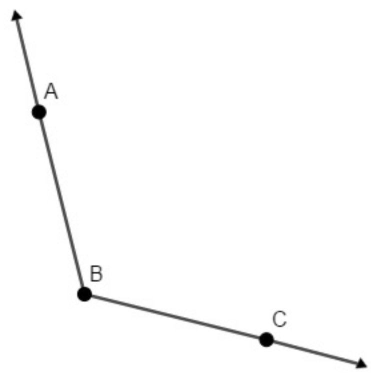
- Segmento:

Corresponde al trozo de recta que está entre dos puntos, incluyendo a estos. En el caso del dibujo este segmento se denota por $\overline{AB}$ y los puntos A y B se denominan **extremos** del segmento.

- Rayo:

Corresponde a un trozo de recta que parte desde un punto fijo, y se prolonga ilimitadamente en un sólo sentido. El punto fijo se denomina **punto de origen** del rayo. En el caso del dibujo, el punto de origen es A. Si consideramos otro punto B del rayo, podemos denotarlo como $\overrightarrow{AB}$.

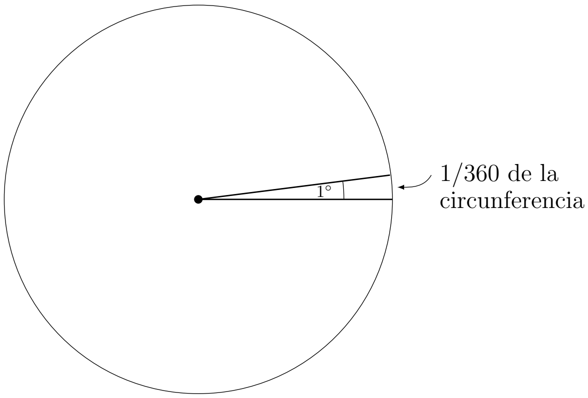
- Ángulo:



Corresponde a la unión de dos rayos que tienen su punto de origen común. Los rayos reciben el nombre de **lados** y el punto de origen común se denomina **vértice**. El ángulo de la figura se puede denotar como $\angle ABC$ (entremedio el vértice) o simplemente como $\angle B$ (sólo el vértice).

Los ángulos se pueden medir en grados. La medida de $\angle B$ se denota como $m\angle B$.

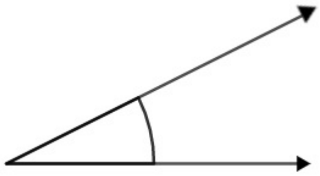
Un **grado** es la medida de un ángulo correspondiente a un arco de longitud igual a $\frac{1}{360}$ de la longitud de una circunferencia.



Notación: 1 grado = $1°$

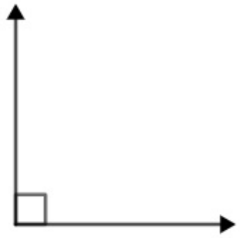
Los ángulos según su medida, se clasifican en:

1. ángulo agudo:



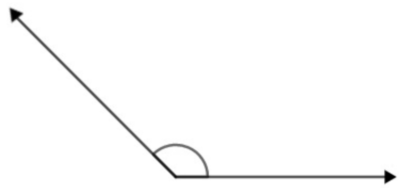
es un ángulo que mide menos de $90°$ (es decir, abarca menos de $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ de una circunferencia).

2. ángulo recto:



es un ángulo que mide $90°$ (es decir, abarca $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ de una circunferencia)

3. ángulo obtuso:

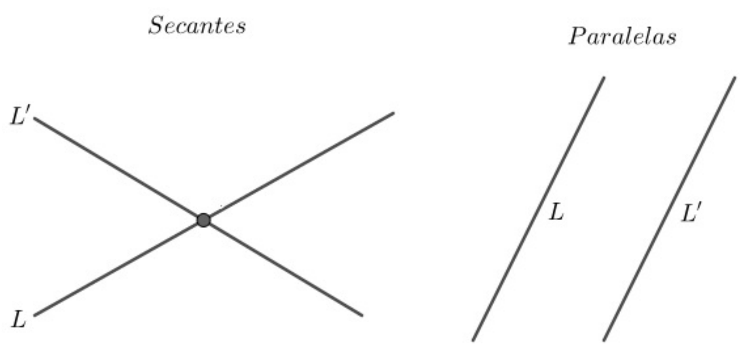


es un ángulo que mide más de 90° y menos de 180° (es decir, abarca más $\frac{90}{360}$ y menos $\frac{180}{360}$ de una circunferencia. O sea, abarca más de la cuarta parte y menos de la mitad de una circunferencia).

4. ángulo extendido:

es un ángulo que mide 180° (abarca la mitad de una circunferencia)

1.1. Posiciones relativas de dos rectas

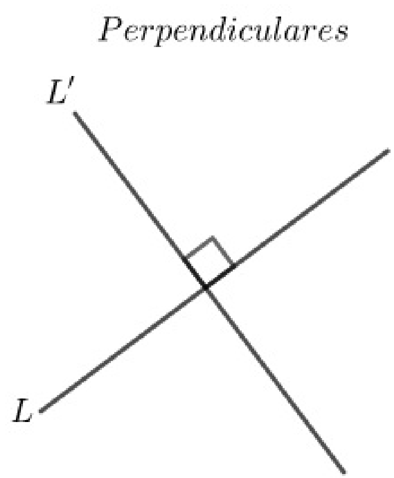


Dadas dos rectas distintas, estas se pueden intersectar en un sólo punto, o simplemente no intersectarse. Decimos que dos rectas son:

- **secantes**: si se intersectan

- **paralelas**: si no se intersectan

Además, si dos rectas secantes forman un ángulo de 90°:

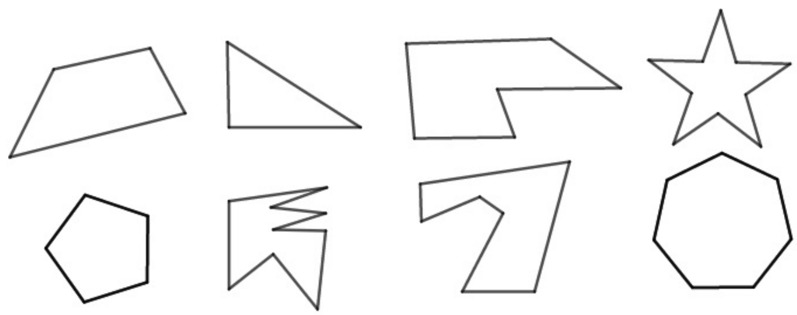


se dice que son **perpendiculares**.

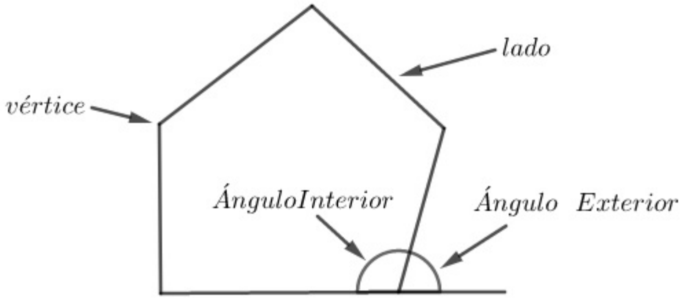
Capítulo 2

Figuras Planas

2.1. Polígonos

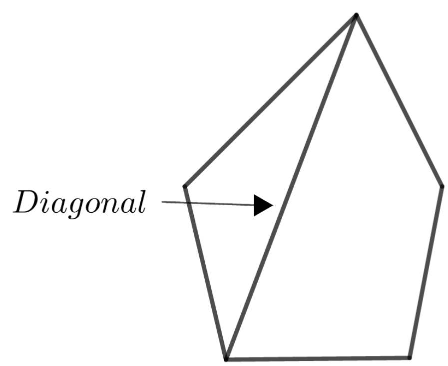


Un **polígono** es una figura plana, la cual consiste en una unión finita de segmentos, los cuales están unidos en sus extremos y forman una región en el plano. Los elementos más importantes de un polígono son:



- Lado: Corresponde a cada segmento que forma el polígono
- Vértice: Corresponde al extremo en común de dos lados consecutivos
- Ángulo interior: Corresponde a un ángulo determinado por dos lados consecutivos, el cual es medido en la región interior del polígono.
- Ángulo exterior: Corresponde a un ángulo determinado por dos lados consecutivos, el cual es medido en la región exterior del polígono.

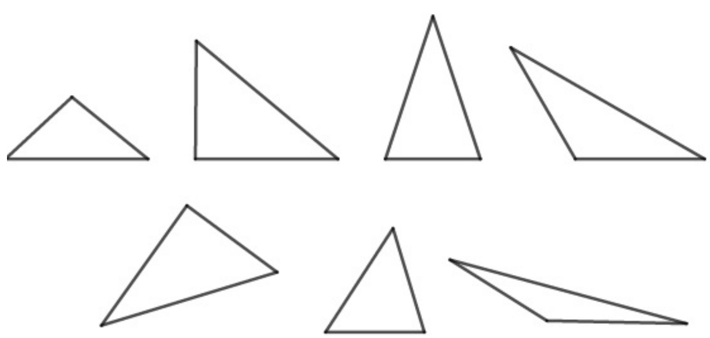
También vale la pena mencionar lo que es una **diagonal** de un polígono:



el cual es un segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono.

Veamos los polígonos más conocidos:

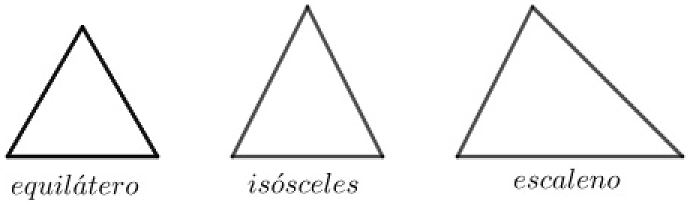
2.1.1. Triángulos



Un triángulo es polígono de tres lados. Una importante característica de los triángulos, es que sus ángulos interiores suman 180°.

Los triángulos se clasifican:

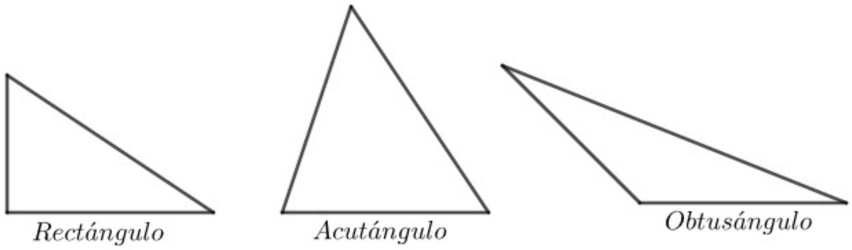
1. Según sus lados:



Se clasifican en:

- Triángulo equilátero: Es aquel triángulo que tiene sus **tres** lados de igual medida. En un triángulo equilátero, sus tres ángulos también tienen igual medida entre sí, por lo que cada uno mide 60°.
- Triángulo isósceles: Es aquel triángulo que tiene **sólo dos** lados de igual medida. El lado de medida distinta recibe el nombre de **base**. Los ángulos interiores de los cuales la base es uno de sus lados, reciben el nombre de **ángulos basales**. Los ángulos basales miden lo mismo.
- Triángulo escaleno: Es aquel que **no** tiene lados de igual medida.

2. Según sus ángulos:



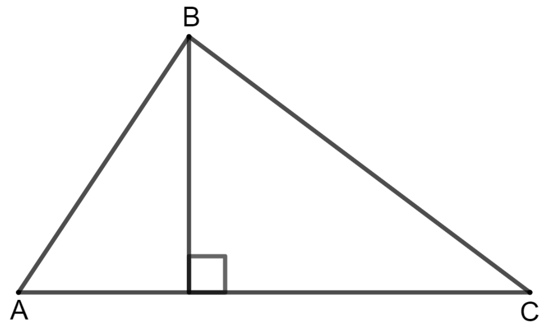
Se clasifican en

- Triángulo acutángulo: Es aquel triángulo que tiene sus tres ángulos agudos, es decir que miden menos de 90°
- Triángulo rectángulo: Es aquel triángulo que tiene un ángulo recto.
- Triángulo obtusángulo : Es aquel triángulo que tiene un ángulo obtuso (¿porqué un triángulo no puede más de un ángulo obtuso?)

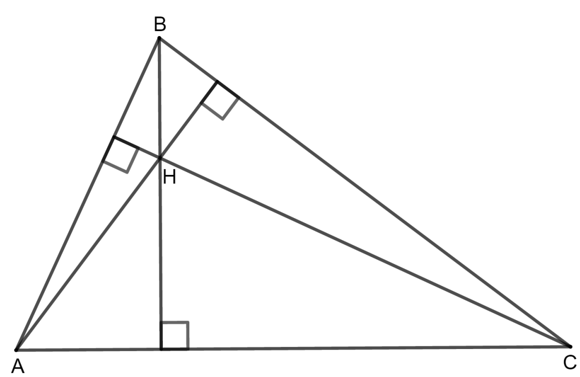
Existen elementos importantes relacionados con un triángulo que debemos conocer.

- Altura:

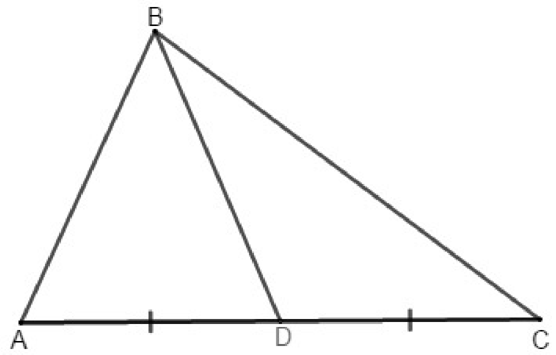
Altura



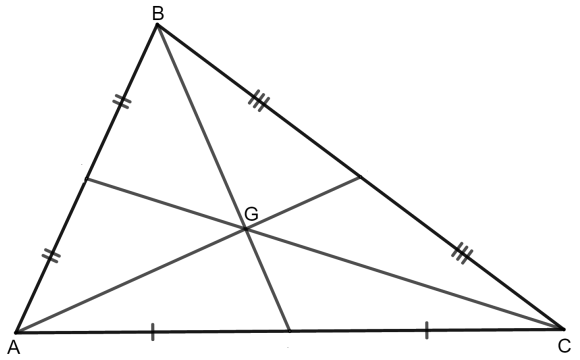
Es un segmento que va desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación (para entender porque a su prolongación, imagine un triángulo obtusángulo), formando un ángulo recto con este. El punto de intersección de las tres alturas, se denomina **ortocentro**



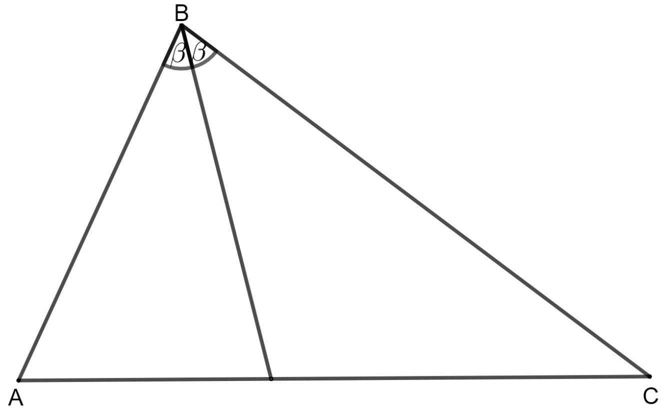
- Mediana:



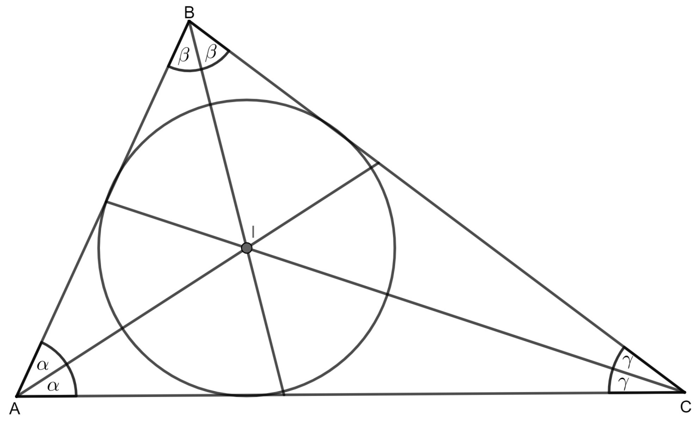
Es un segmento que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las tres medianas, se denomina **centro de gravedad**.



- Bisectriz:

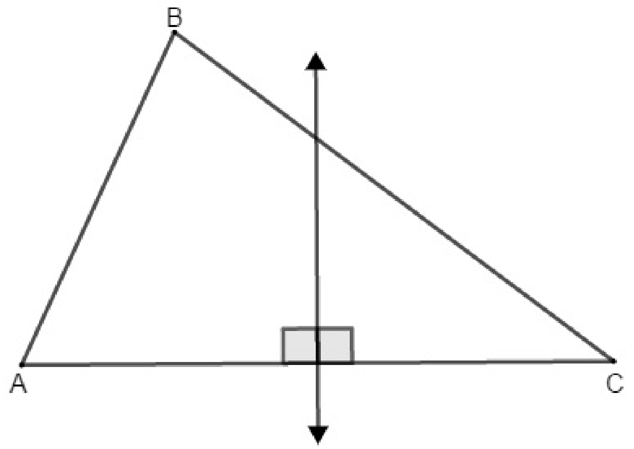


Es un segmento que va desde un vértice al lado opuesto, dividiendo al ángulo interior respectivo en dos ángulos de igual medida. El punto de intersección de las tres bisectrices, se denomina **incentro**.

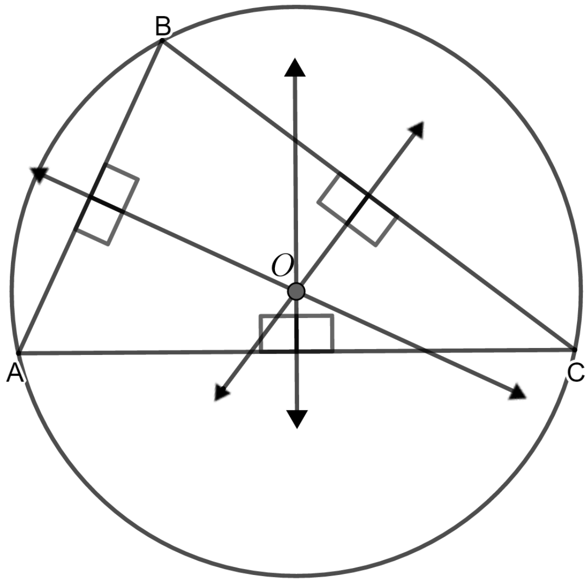


El incentro es el centro de la circunferencia "más grande"que está contenida en un triángulo. Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia inscrita**.

- Mediatriz:

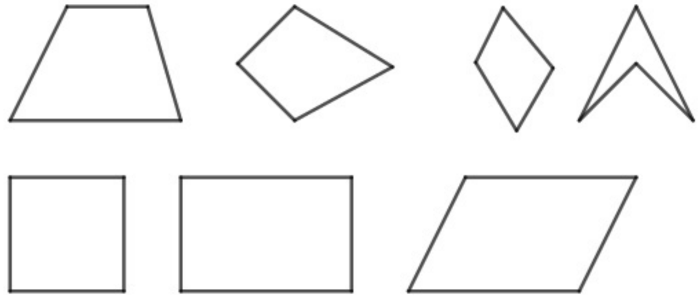


Es una recta que es perpendicular a cada lado del triángulo en su punto medio. El punto de intersección de las tres mediatrices, se denomina **circuncentro**.

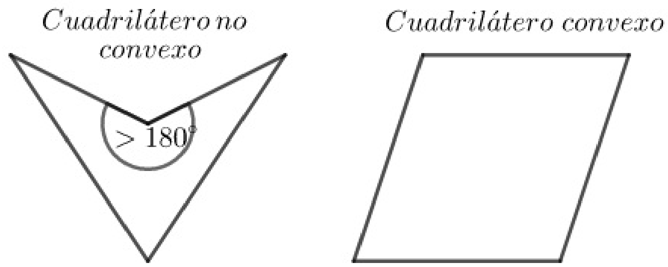


El circuncentro es el centro de la circunferencia "más pequeña"que contiene a un triángulo. Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia circunscrita**.

2.1.2. Cuadriláteros



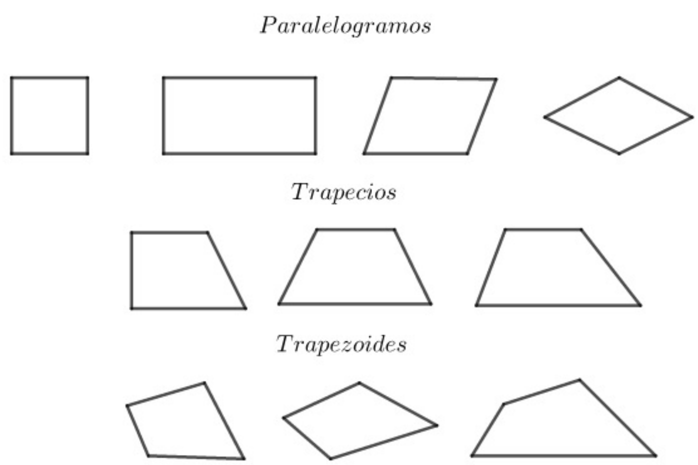
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados. Los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°. Los cuadriláteros, en forma primaria, se pueden clasificar en:



- Cuadriláteros no convexos: Son aquellos cuadriláteros en los cuales existe un ángulo interior que mide más de 180°.

- Cuadriláteros convexos: Son aquellos cuadriláteros para los cuales cada uno de sus ángulos interiores mide menos de 180°.

Existen varios tipos de cuadriláteros convexos. Estos se dividen en

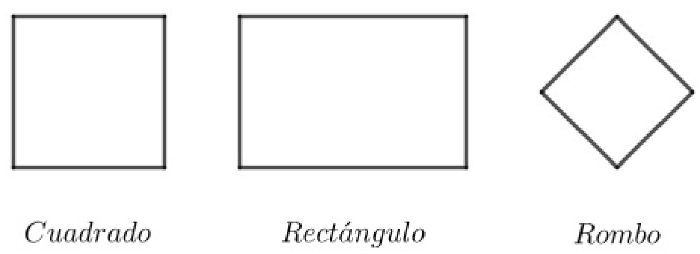


- Paralelogramos: Son aquellos cuadriláteros cuyos **dos** pares de lados opuestos son paralelos. En todo paralelogramo, sus lados opuestos miden lo mismo, y sus ángulos opuestos también.

- Trapecios: Son aquellos cuadriláteros que tienen **sólo** un par de lados opuestos paralelos.

- Trapezoides: Son aquellos cuadriláteros que **no** tienen pares de lados opuestos paralelos.

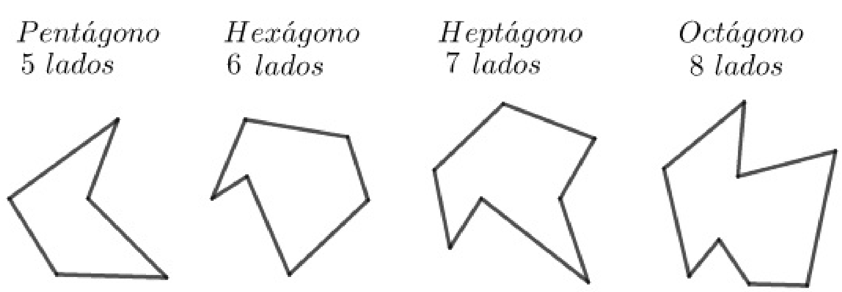
Estudiaremos más profundidad los paralelogramos. Los más conocidos son



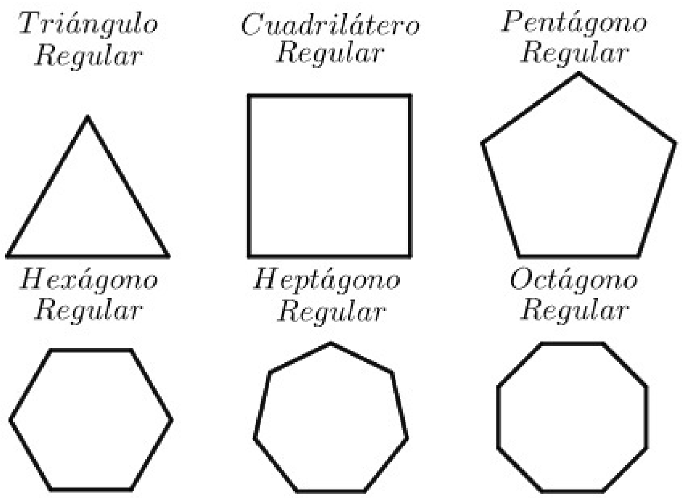
- Rombo: Es un paralelogramo en el cual **todos** sus lados miden lo mismo. Note que al trazar sus diagonales, estas forman un ángulo de 90°.
- Rectángulo: Es un paralelogramo en el cual todos sus ángulos interiores miden lo mismo. Como en un cuadrilátero la suma de estos es 360°, entonces cada uno mide 90°.
- Cuadrado: Es un paralelogramo en el cual todos sus ángulos interiores miden lo mismo (90° cada uno) y todos sus lados miden lo mismo.

2.1.3. Polígonos en general

Veamos algunos polígonos que tienen más de 4 lados:



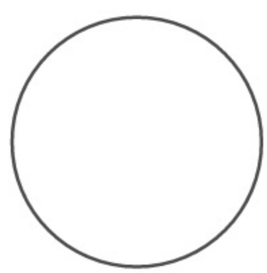
En general, si un polígono tiene n lados, la suma de sus ángulos interiores es $(n-2)180°$. Cuando un polígono tiene todos sus lados de igual medida y sus ángulos también, entonces decimos que es un **polígono regular**. Acá algunos de los más clásicos



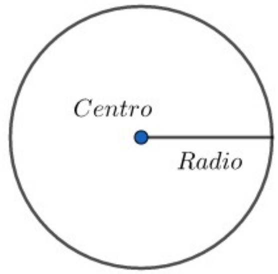
En base a lo dicho, ¿cuánto mide cada ángulo interior de un pentágono? ¿y de un hexágono?

2.2. Circunferencia

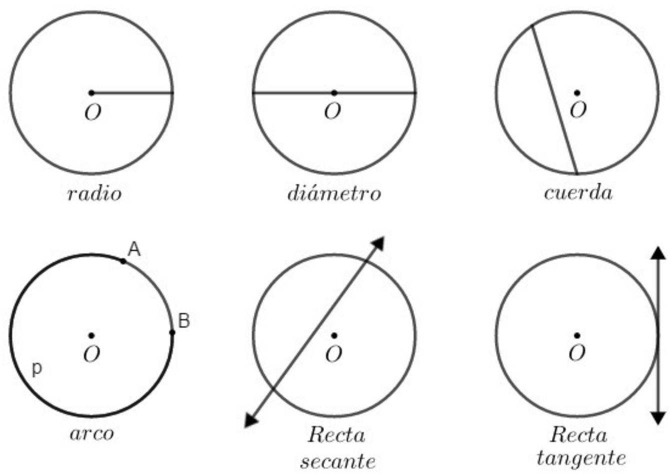
Imagínese un polígono regular con cada vez más lados ¿a qué figura se va pareciendo? Intuitivamente vemos que se va pareciendo a una circunferencia:



En una circunferencia, todos los puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado **centro**. La distancia común se denomina **radio**:



Distinguimos otros elementos importantes:



- Cuerda: Segmento que une a dos puntos de la circunferencia

- Diámetro: Cuerda que pasa por el centro de la circunferencia

- Arco: Es un trozo de circunferencia

- Semicircunferencia: Es un arco que abarca la mitad de la circunferencia

- Recta secante: Es una recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia

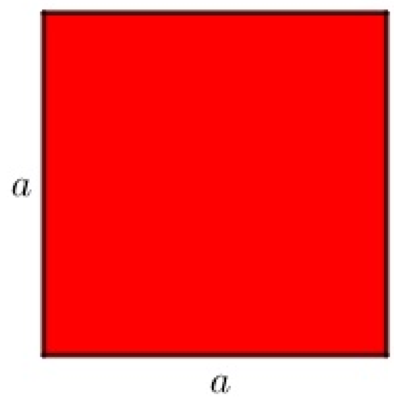
- Recta tangente: Es una recta que intersecta **sólo** en un punto a la circunferencia.

2.3. Área y perímetro de una figura plana

Dada una figura plana cerrada, como lo es un polígono o una circunferencia, esta siempre encierra una región. El espacio que ocupa tal región, se puede medir, y el valor corresponde a lo que llamamos el **área** de una figura plana. Para medir tal espacio, consideramos cuadraditos de lado 1 unidad ($1\ u$), cuya área definimos como 1 unidad cuadrada ($1\ u^2$)
En el caso del perímetro, este corresponde a la longitud total de su çontorno". Es cómo si formáramos la figura con una cuerda, luego la desatáramos y la midiéramos.

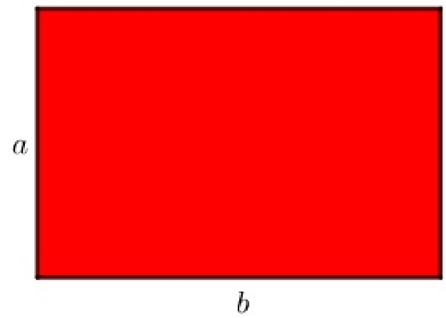
¿Cómo calcular el área y el perímetro de figuras conocidas? Veamos esto a continuación:

- Cuadrado: Consideremos un cuadrado de lado a



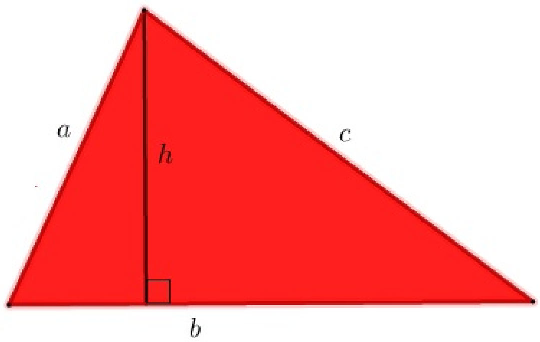
  - su área corresponde a $A = a^2$. (Imagínese un cuadrado de lado 3 u. En su región interior caben $9 = 3^2$ cuadraditos de lado 1 u, lo que justifica que su área sea $A = 9\ u^2$)
  - su perímetro P de un corresponde a $P = 4a$

- Rectángulo: Consideremos un rectángulo de lados a y b



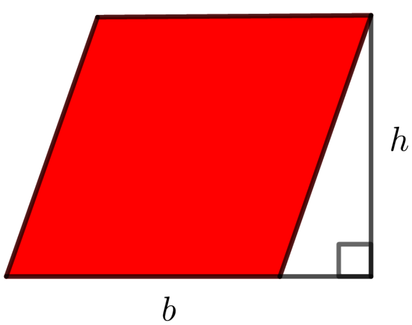
  - su área corresponde a $A = ab$ (Imagínese un rectángulo de lados 3 u y 2 u. En su región interior caben $3 \cdot 2 = 6$ cuadraditos de lado 1 u, lo que justifica que su área sea $A = 6\ u^2$)
  - su perímetro P de un corresponde a $P = 2a + 2b$

- Triángulo: Consideremos un triángulo de lados a, b y c. Escogemos como referencia a un lado de longitud b, el cual llamaremos base. Sea h la altura correspondiente a la base escogida.



  - su área corresponde a $A = \dfrac{bh}{2}$ (Para convencerse de está fórmula, puede pensar primer en un triángulo rectángulo de catetos b y h, y formar a partir de él, un rectángulo de lados b y h. Para otros triángulos, la idea es formar un rectángulo a partir de él, y luego deducir la fórmula).
  - su perímetro P de un corresponde a $P = a + b + c$

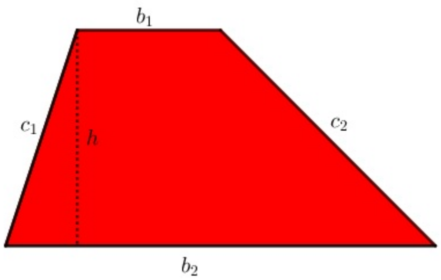
- Rombo: Consideremos un rombo de lado b, uno de ellos puede ser considerado como base. También consideremos su altura h, que es un segmento perpendicular que va desde un vértice hasta la base.



  - su área corresponde a $A = bh$

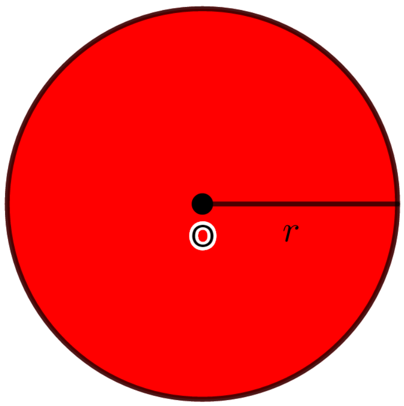
- su perímetro P de un corresponde a $P = 4b$

- Trapecio: Escogemos como bases a los lados paralelos b_1 y b_2. Sea h la altura que va desde b_1 a b_2 (la altura no es otra cosa que la distancia entre sus bases).



  - El área del trapecio viene dada por $A = \dfrac{(b_1 + b_2)h}{2}$.
  - Si los lados no paralelos tienen longitud c_1 y c_2, entonces su perímetro es $P = c_1 + c_2 + b_1 + b_2$.

- Circunferencia: Consideremos una circunferencia de radio r



Consideremos el número irracional π , el cual considerando algunas cifras decimales, corresponde a

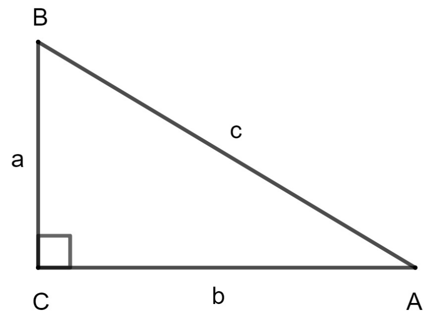
$$\pi = 3,14159\ldots$$

.

- Su área es $A = \pi r^2$
- Su perímetro es $P = 2\pi r$

2.4. Teorema de Pitágoras

Consideremos el triángulo rectángulo

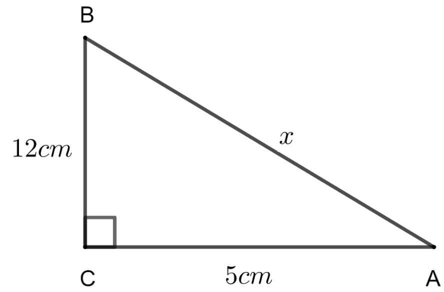


Los lados a y b que forman el ángulo recto, se denominan **catetos**. El lado restante, es decir, el lado opuesto al ángulo recto, se denomina **hipotenusa**. Note que la hipotenusa es el lado más largo de un triángulo rectángulo, dado que a mayor ángulo, se opone mayor lado.

El teorema de Pitágoras afirma que

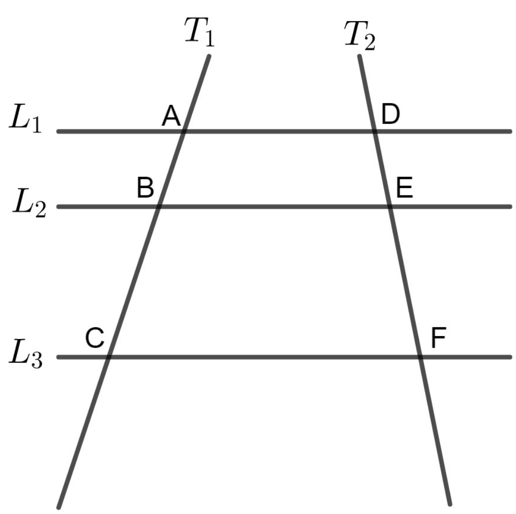
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Es decir, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. De este modo, si tenemos el siguiente triángulo rectángulo



Se tiene que $12^2 + 5^2 = x^2$, por lo que $x^2 = 144 + 25 = 169$, de donde concluimos que $x = 13$. Es decir, su hipotenusa mide 13 unidades.

2.5. Teorema de Thales

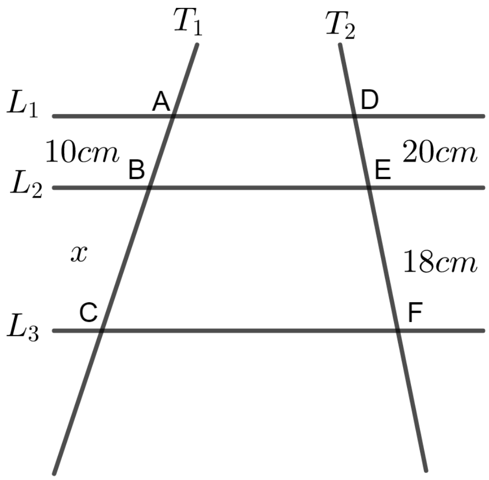


Considere tres rectas paralelas L_1, L_2 y L_3 y dos rectas secantes T_1 y T_2. Este teorema afirma que existen relaciones de proporcionalidad entre los segmentos que se forman, las cuales son

- $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{ED}$

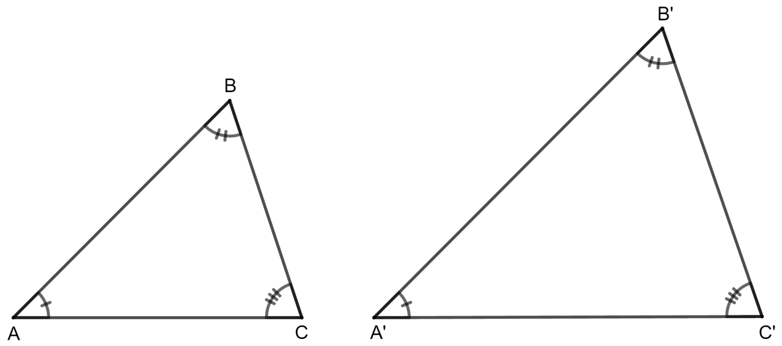
- $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$
- $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$

Por ejemplo, en la figura



se tiene que $\dfrac{10}{x} = \dfrac{20}{18}$, por lo que $x = 9$. Así, $\overline{BC}$ mide 9 unidades.

2.6. Semejanza de triángulos



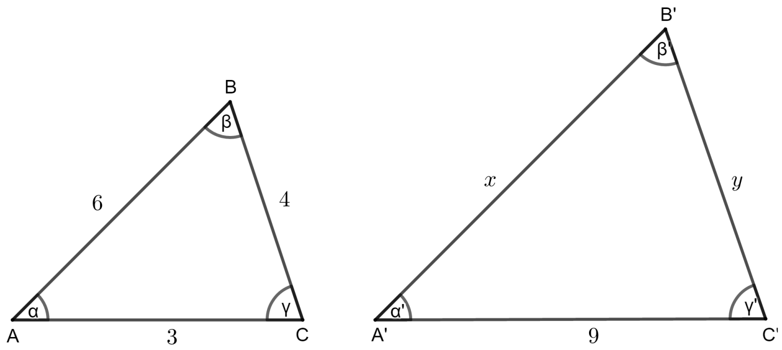
En forma intuitiva, dos triángulos $\triangle ABC$ y ABC, en ese orden, se dicen **semejantes** entre sí, cuando tienen igual forma y distinto tamaño (sino respetaremos el orden, entonces podríamos rotar uno de los triángulos, y tal vez ya no serían semejantes). Más específicamente,

- igual forma quiere decir que sus ángulos respectivos son de igual medida, esto es $m\angle A = m\angle A'$, $m\angle B = m\angle B'$ y $m\angle C = m\angle C'$.

- en cuanto al tamaño, lo que sucede es que sus lados respectivos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Por ejemplo, para los triángulos semejantes

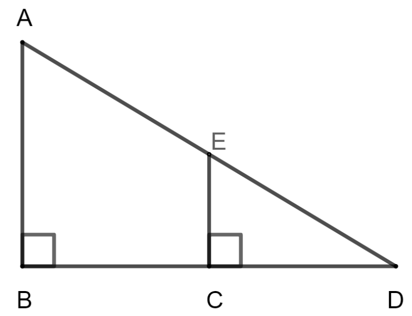


se tiene que

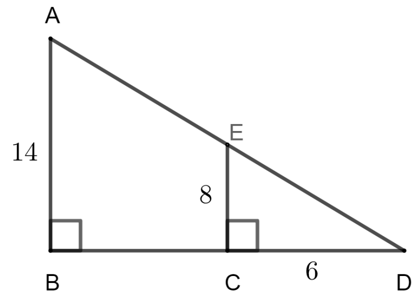
$$\frac{3}{9} = \frac{6}{x} \text{ y } \frac{3}{9} = \frac{4}{y}.$$

De este modo, $x = 18$ e $y = 12$.

Cuando dos triángulos tienen dos ángulos respectivos de igual medida, esto basta para afirmar que son semejantes. Por ejemplo, en la figura



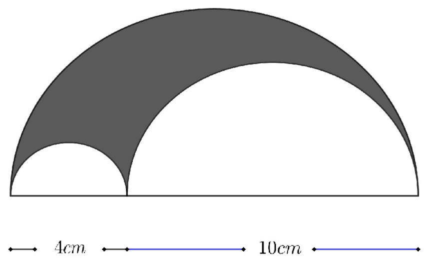
los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ECD$, en ese orden, son semejantes, dado que ambos tienen un ángulo recto, y además tienen un ángulo en común. De este modo, si agregamos algunas medidas de sus lados:

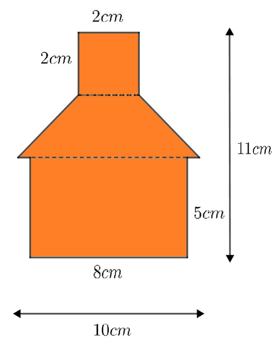


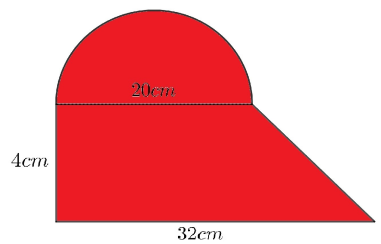
entonces, por ejemplo $\frac{14}{8} = \frac{BD}{6}$, de donde $BD = 10{,}5$. ¡Obtenga el resto de los segmentos de esta figura!

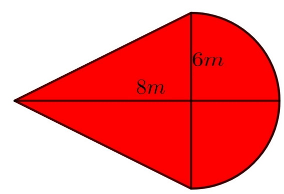
2.7. Ejercicios propuestos

1. Determine el área y perímetro de las siguientes figuras:

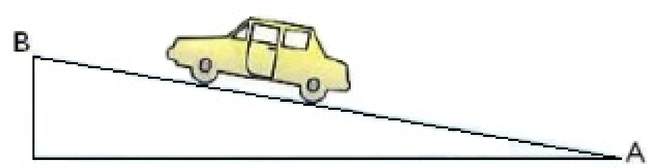




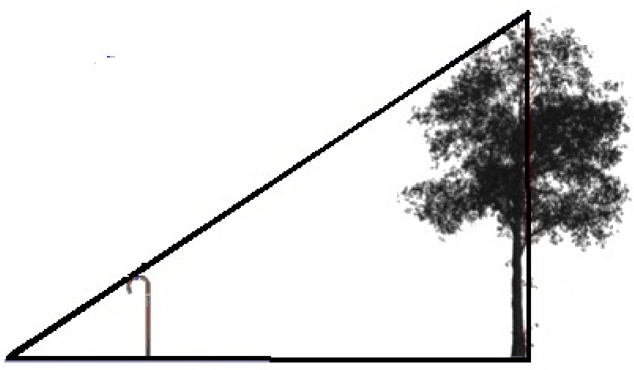




2. Un auto se desplaza desde un punto A en la planicie hasta un punto B en la cúspide de un cerro, recorriendo 37 metros. Si la distancia horizontal es de 35 metros ¿Cuál es la altura del cerro?



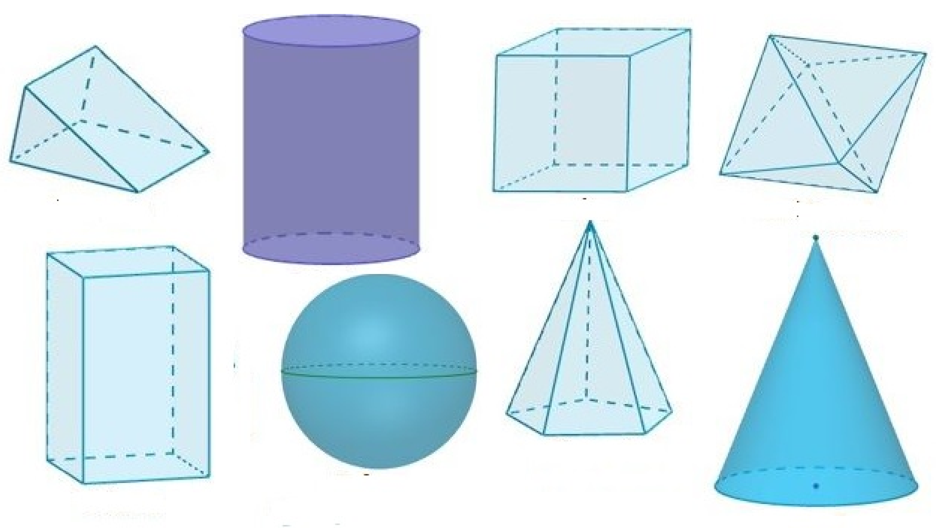
3. Se desea determinar la altura de un árbol que proyecta una sombra de 6 metros. Para ello, se coloca un bastón de 1 metro de modo que el extremo final de su sombra coincida con el extremo finalde la sombra del árbol. El bastón proyecta un sombra de 1 metro y medio ¿Cuál es la altura del árbol



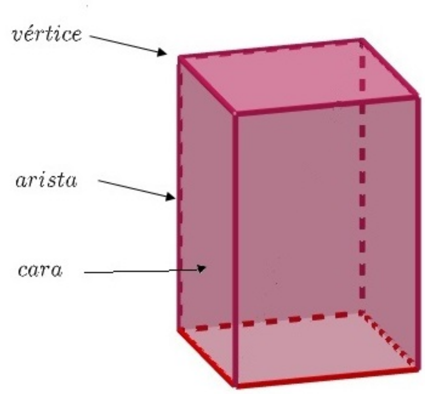
Capítulo 3

Cuerpos geométricos

3.1. Poliedros



Un **poliedro** es una unión finita de regiones poligonales, los cuales están unidos a través de alguno de sus lados, y que forman una región en el espacio. Los elementos más importantes de un poliedro son

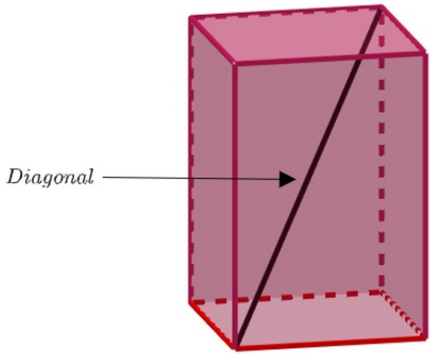


- Cara: Es cada región poligonal que compone al cuerpo geométrico

- Arista: Es cada segmento que limita a una cara

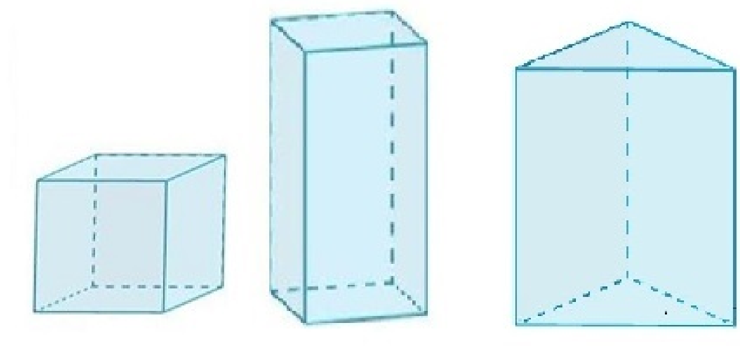
- Vértice: Es el punto de intersección de dos aristas

Otro elemento importante es una **diagonal** de un poliedro:



el cual es un segmento que une dos vértices que no pertenecen a la misma cara. Veamos algunos de los poliedros más conocidos:

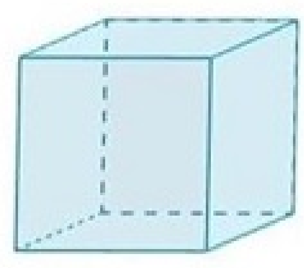
3.1.1. Prismas



Son poliedros que tienen un par de caras paralelas e idénticas llamadas bases (base inferior y base superior más específicamente), y además sus caras laterales son regiones cuyo contorno es un paralelogramo. En este apunte nos referiremos a prismas rectos, en los cuales se cumple que las caras laterales son perpendiculares a las bases.

Algunos prismas rectos conocidos son:

- Cubo:

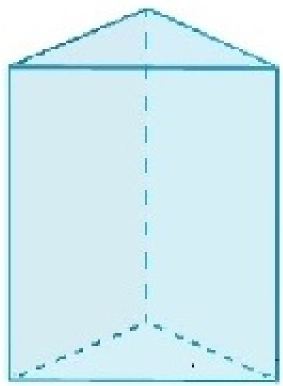


Sus bases y sus caras laterales son regiones cuadradas idénticas.

- Paralelepípedo:

Sus bases son regiones rectangulares, y sus caras laterales son regiones rectangulares no necesariamente idénticas a las bases.

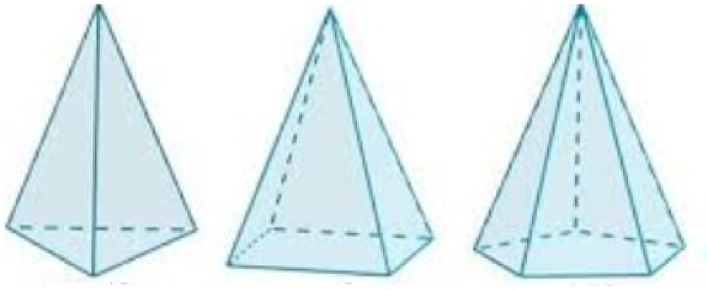
- Prisma triangular:



Sus bases son triángulos.

En cualquier prisma, su altura corresponde a la distancia entre sus bases, la cual es medida en forma perpendicular.

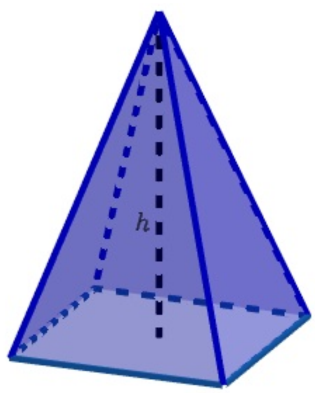
3.1.2. Pirámides



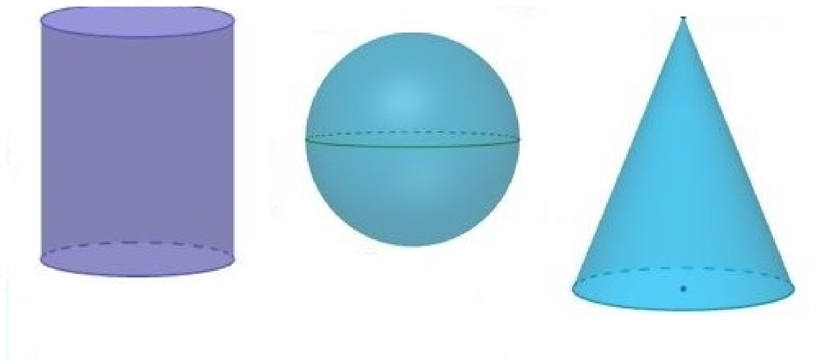
Son cuerpos geométricos formados por una región polígonal cualquiera llamada **base**, y cuyas caras laterales son regiones triángulares que tienen un vértice común, el cual es denominado **vértice** de la pirámide. Según la región poligonal a la que corresponda la base, las pirámides se clasifican en

- Pirámide triangular: Si su base es una región triangular
- Pirámide rectangular: Si su base es una región rectangular
- Pirámide cuadrada: Si su base es una región cuadrada,

entre otras. En cualquier pirámide, su altura h corresponde a la distancia perpendicular desde el vértice al plano de la base:



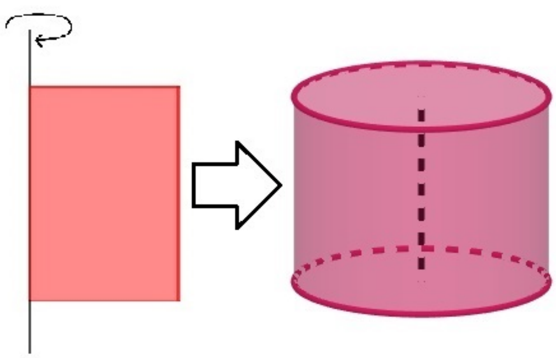
3.2. Cilindro, cono y esfera



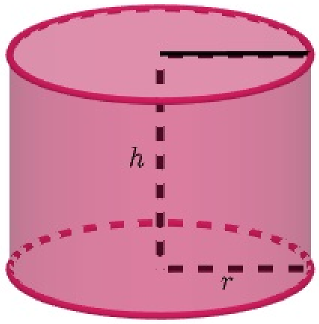
Estas tres figuras geométricas son parte de los cuerpos geométricos llamados **sólidos de revolución**, los cuales se obtienen al hacer girar cierta región plana en torno a una recta fija, llamada **eje de revolución**, que en nuestro caso será una recta vertical. De este modo, el cilindro y el cono que estudiaremos serán rectos.

Veamos el detalle:

- Cilindro:

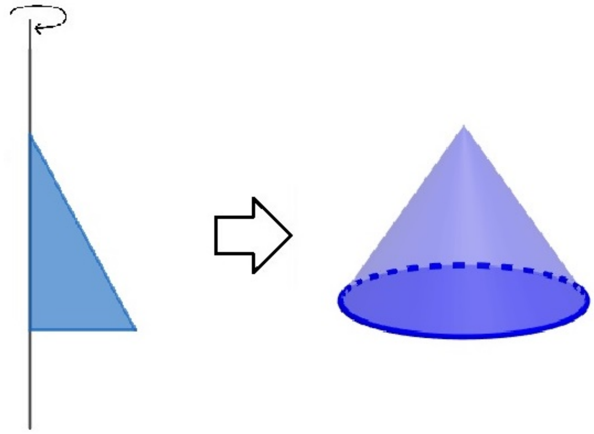


Se obtiene al girar un rectángulo sobre uno de sus lados. Sus bases son regiones circulares. En un cilindro identificamos



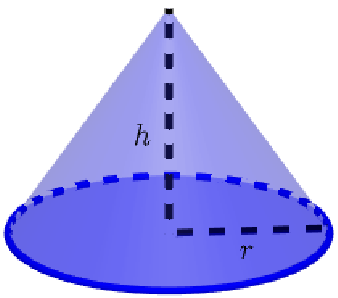
el radio de la base r y su altura h, esta última es la distancia (perpendicular) entre sus bases.

- Cono:



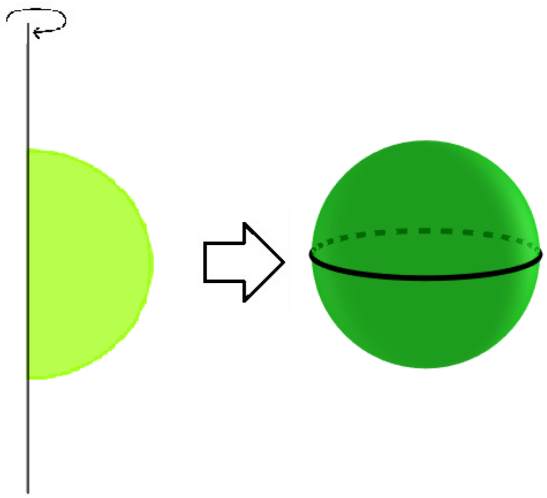
Se obtiene al girar la región determinada por un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. El punto en común entre la hipotenusa y el cateto que gira se denomina **vértice**. Su base es una región circular.

En un cono identificamos

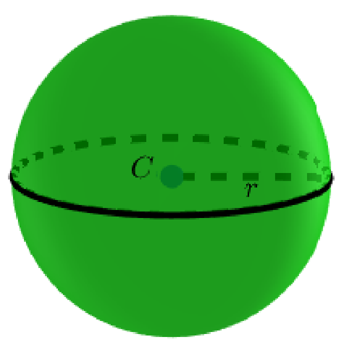


el radio de la base r y su altura h, la cual es la distancia (perpendicular) desde el vértice hasta la base.

- Esfera:

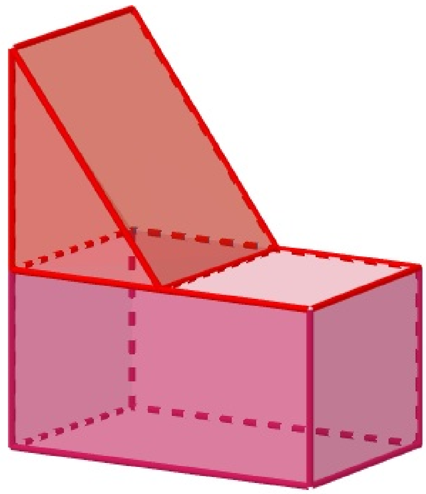


Se obtiene al girar un semircirculo con respecto a su diámetro. En una esfera identificamos



su centro C y su radio r. En este sólido, todos sus puntos están a una distancia del centro igual al radio.

3.3. Volumen y área de la superficie de cuerpos geométricos

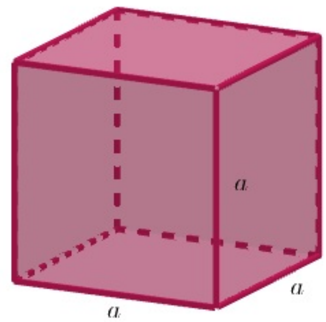


Un cuerpo geométrico encierra una región del espacio tridimensional. El espacio que ocupa tal región se puede medir, y el valor corresponde a lo que llamamos el **volumen** de un cuerpo geométrico. Para medirlo, la unidad básica son cubos de aristas 1 u, cuyo volumen definimos como 1 u^3.

En el caso del área de la superficie, esta corresponde al aŕea total de su çáscara". Es como si formáramos un cuerpo geometrico con papel, y luego lo desarmáramos y midiéramos el área del papel que ocupamos.

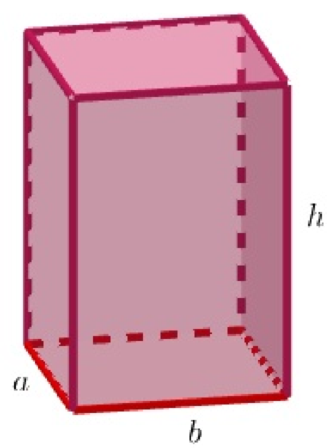
¿Cómo calcular el volumen y el área de la superficie de cuerpos conocidos? Veamos esto a continuación:

- Cubo: Consideremos un cubo de arista de lado a



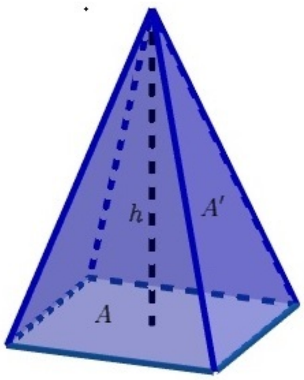
  - su volumen corresponde a $V = a^3$ (note que es volumen es el área de su base a^2 multiplicado por su altura a)
  - su área de la superficie es $S = 6a^2$

- Paraleleípedo: Consideremos que su base es una región rectangular lados a y b, y que su altura es h



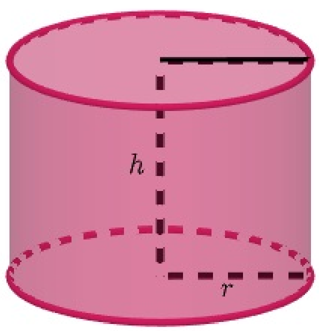
  - su volumen corresponde a $V = abh$ (npte que es el área de la base multiplicada por la altura)
  - su área de la superficie es $S = 2ab + 2ah + 2bh$

- Pirámide: Considere que su base es una región poligonal de área A. Sea h la altura de la pirámide y A' el área de cada lateral.



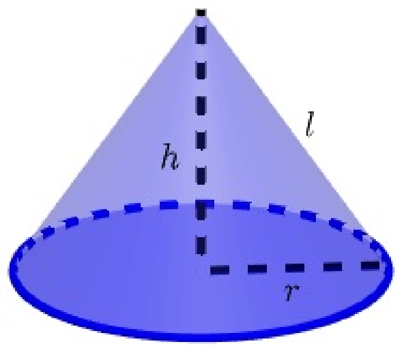
- su volumen corresponde a $V = \dfrac{1}{3}Ah$
- su área de la superficie es $S = A + 3A'$

- Cilindro: Considere que su base es una región circular de radio r. Sea h la altura del cilindro



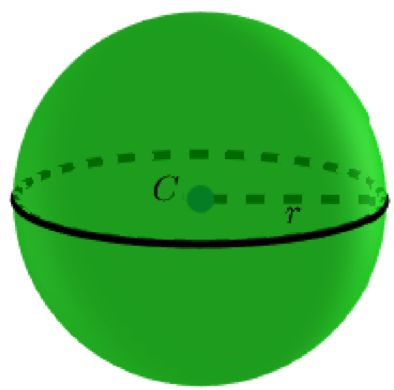
- su volumen corresponde a $V = \pi r^2 h$ (note que es el área de la base multiplicada por su altura)
- su área de la superficie es $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (note que al "desarmar"su cara lateral, obtenemos un rectángulo en el que un lado es la altura y el otro el perímetro de la base. De este modo, el área de la cara lateral es $2\pi rh$)

- Cono: Considere que su base es una región circular de radio r. Sea h la altura del cono y l la distancia desde el vértice hasta el borde la base.



- su volumen corresponde a $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (Un tercio del área de la base, todo esto multiplicado por su altura)
- su área de la superficie es $S = \pi r l$.

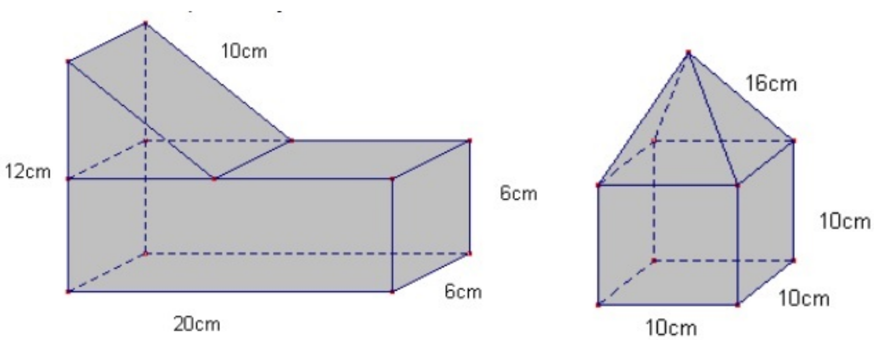
▪ Esfera: Considere una esfera de radio r:



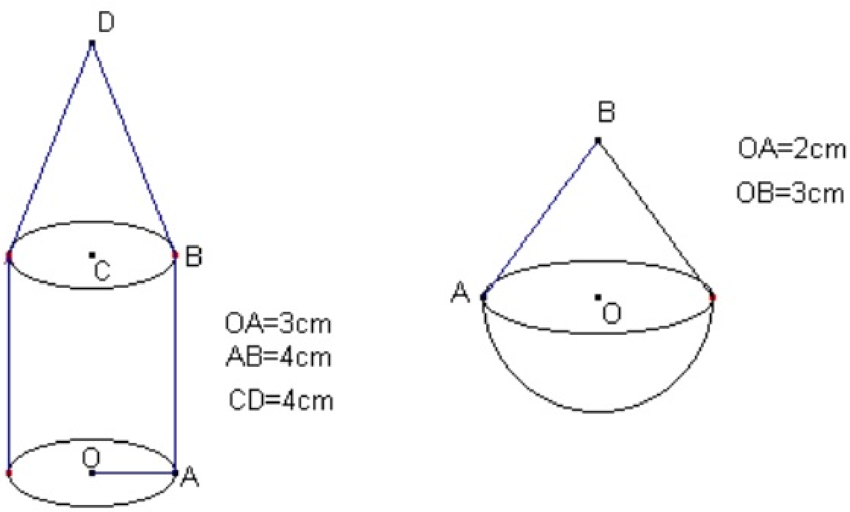
- su volumen corresponde a $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
- su área de la superficie es $S = 4\pi r^2$.

3.4. Ejercicios Propuestos

1. Determine el volumen y el área de la superficie de los siguientes cuerpos



   a)



   b)

2. Un estanque tiene la forma de un cono recto invertido, de radio basal $50cm$ y altura $2m$. Se llena con agua ¿Cuál es el volumen de agua en el estanque, en el momento en que el nivel del agua es de $70cms$?