Apunte Básico de Nivelación
Asignatura: Matemática
Área: Números

Edwars Jiménez, Katherine Matuschka, Maribel Paredes, Francisco Toledo

Índice general

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1. Números Naturales

El conjunto de los números naturales, el cual es denotado por $\mathbb{N}$, consiste en los números que usualmente utilizamos para contar los elementos de un conjunto, o para describir la posición de cada elemento de una secuencia ordenada. De este modo, el conjunto $\mathbb{N}$, representado con algunos de sus elementos, corresponde a

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}.$$

1.2. Números Enteros

El conjunto de los números enteros, el cual es denotado por $\mathbb{Z}$, representado con algunos de sus elementos, viene dado por

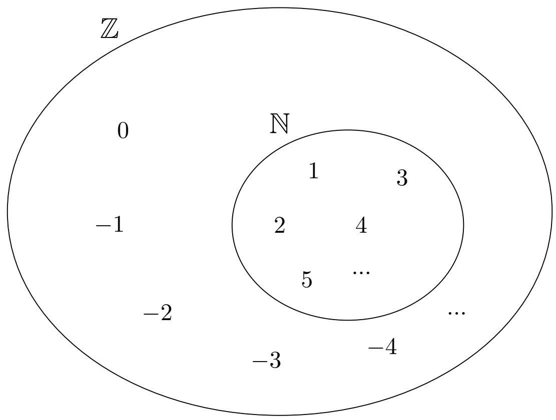
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

El conjunto de los números enteros tiene como elementos a los números naturales, al cero y los llamados opuestos aditivos de los números naturales. Más formalmente, decimos que

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Los números enteros son usados para medir temperatura, altura con respecto al nivel del mar, utilidades de una empresa, etc.

Note que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$:

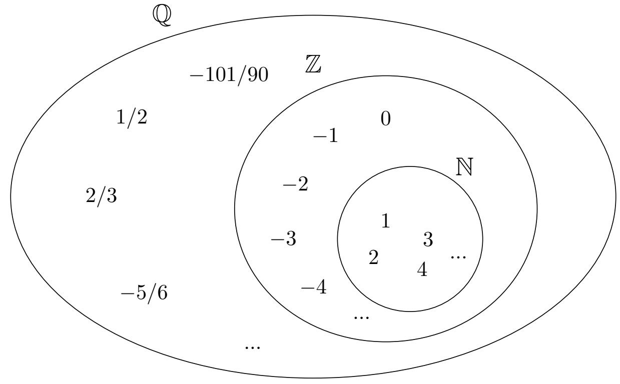


1.3. Números Racionales

El conjunto de los números racionales, el cual es denotado por $\mathbb{Q}$, corresponde al conjunto de números decimales que se pueden representar como una fracción de números enteros, tales como

- $0{,}5$, el cual puede ser expresado como $\frac{1}{2}$
- $-1{,}25$, el cual puede ser representado como $\frac{-6}{5}$ o simplemente como $-\frac{6}{5}$
- $0,\overline{3} = 0{,}333\ldots$, el cual puede ser representado como $\frac{1}{3}$
- $1{,}1\overline{2} = 1{,}1222\ldots$, el cual puede ser representado como $\frac{101}{90}$
- 5, el cual puede ser representado como $\frac{5}{1}$
- -30, el cual puede ser representado como $\frac{-30}{1}$ o simplemente como $-\frac{30}{1}$

Note que cualquier número entero a puede ser representado como $\frac{a}{1}$, por lo que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$:



En general, los números racionales corresponden a:

- Números decimales finitos:

  Ejemplos: $1{,}25; 3{,}4; -2{,}125; 7; -3$.

  Son aquellos números con una cantidad finita de cifras decimales.

- Números decimales periódicos:

  Ejemplos: $3.\overline{2} = 3{,}222...; 4.\overline{35} = 4{,}3535...$

  Son aquellos números para los cuales, en su parte decimal, se repite indefinidamente un patrón de cifras, el cual está posicionado a partir de la primera cifra decimal.

- Números decimales semiperiódicos:

  Ejemplos: $2{,}3\overline{5} = 2{,}3555...;\ 1{,}17\overline{2} = 1{,}17222...$

  Son aquellos números, para los cuales, en su parte decimal, se repite indefinidamente un patrón de cifras, el cual no está posicionado a partir de la primera cifra decimal.

Ejercicio 1.3.1. *Exprese* $1,35$ *como una fracción irreducible de números enteros.*

Solución. Sea

$$x = 1,35$$

Multiplicamos esta igualdad por una potencia de 10, de modo que $1,35$ se transforme en un número entero. Es decir, multiplicamos esta igualdad por 100. Obtenemos que

$$x = 1,35 \Leftrightarrow 100x = 135$$

Despejando x de la última igualdad, se deduce que

$$x = \frac{135}{100} \Leftrightarrow x = \frac{27}{20}.$$

Por lo tanto, $1,35$ puede ser expresado como la fracción irreducible $\frac{27}{20}$. $\square$

Ejercicio 1.3.2. *Exprese* $3,\overline{27}$ *como una fracción irreducible de números enteros.*

Solución. Sea

$$x = 3,272727... \tag{1.3.1}$$

Multiplicamos esta igualdad por una potencia de 10, de modo que el número decimal obtenido a la derecha, tenga el mismo periodo que $3,\overline{27}$. Es decir, multiplicamos (1.3.1) por 100, obteniendo la igualdad

$$100x = 327,272727... \tag{1.3.2}$$

Si a (1.3.2) le restamos (1.3.1), obtenemos que

$$100 - x = 327 - 3,$$

de donde se deduce que

$$99x = 327 - 3 \Leftrightarrow x = \frac{324}{99} \Leftrightarrow x = \frac{36}{11}.$$

Así, hemos probado que $3,\overline{27}$ es expresado como la fracción irreducible $\frac{36}{11}$. $\square$

Ejercicio 1.3.3. *Exprese* $1,5\overline{4}$ *como una fracción irreducible de números enteros.*

Solución. Sea

$$x = 1,5444... \tag{1.3.3}$$

Multiplicamos (1.3.3) por una potencia de 10, de modo que el número decimal obtenido a la derecha sea periódico. Es decir, multiplicamos (1.3.3) por 10, obteniendo

$$10x = 15,444... \tag{1.3.4}$$

Ahora, multiplicamos (1.3.4) por una potencia de 10 , de modo que el número decimal obtenido a la derecha, tenga el mismo periodo que $15,\overline{4}$, es decir, multiplicamos (1.3.4) por 10, obteniendo

$$100x = 154,444... \tag{1.3.5}$$

Si a (1.3.5) le restamos (1.3.4), obtenemos $90x = 154 - 15$, de donde $x = \frac{139}{90}$. O sea, $1,5\overline{4}$ puede ser expresado como la fracción irreducible $\frac{139}{90}$. □

1.3.1. Comparación de fracciones.

Ejercicio 1.3.4. *En las elecciones de Pelotillehue, Condorito y Comegato compiten palmo a palmo por obtener el puesto de alcalde de la comuna. Condorito obtuvo $\frac{1}{3}$ del total de votos y Comegato $\frac{7}{20}$. ¿Quién ganó la elección?*

Solución. Debemos determinar quién es mayor, si $\frac{1}{3}$ o $\frac{7}{20}$. Para esto, transformamos ambas fracciones en fracciones con el mismo denominador. El denominador común, será el $M.C.M$ entre los denominadores 3 y 20, es decir 60. De este modo,

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 20}{3 \cdot 20} = \frac{20}{60}$$

y

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{21}{60}$$

Así, como

$$\frac{21}{60} > \frac{20}{60},$$

entonces

$$\frac{7}{20} > \frac{1}{3},$$

por lo que Comegato es el nuevo alcalde. □

Ejercicio 1.3.5. *¿Qué número es mayor,*

a) $\frac{11}{14}$ *o* $\frac{5}{6}$*?*

Solución. Note que $MCM(14,6) = 42$. De este modo, transformamos ambas fracciones en fracciones equivalentes con denominador 42. En efecto,

$$\frac{11}{14} = \frac{11 \cdot 3}{14 \cdot 3} = \frac{33}{42}$$

y

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} = \frac{35}{42},$$

por lo que concluimos que

$$\frac{5}{6} > \frac{11}{14}.$$

□

b) $\frac{2}{5}$ *o* $\frac{3}{10}$?

Solución. Note que $M.C.M.(5,10) = 10$. Queremos que ambas fracciones tengan denominador 10, por lo que sólo transformamos la fracción $\frac{2}{5}$. En efecto,

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10},$$

por lo que

$$\frac{2}{5} > \frac{3}{10}.$$

□

Observación 1.3.1. Dadas dos fracciones, para determinar cuál de ellas es mayor, o si son equivalentes, podemos transformar una o ambas fracciones en fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, según sea necesario. El denominador común escogido puede ser el MCM entre los denominadores. Una vez realizado esto, comparamos las fracciones obtenidas.

1.3.2. Suma y resta de fracciones

Definición 1.3.1. *Si a, b, c son números enteros con $c > 0$, entonces*

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

y

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Observación 1.3.2. Es decir, al sumar (restar) dos fracciones del mismo denominador, obtenemos una fracción cuyo denominador es el denominador común, y cuyo numerador es la suma (resta) de los numeradores.

Veamos que ocurre si se suman fracciones con distinto denominador:

Ejemplo 1.3.2. *Considere la suma*

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6}.$$

Responda

a) *¿cuál es el mínimo común múltiplo (MCM) entre los denominadores?*

   Solución. El mínimo común múltiplo es 12.

b) *transforme cada fracción de la operación dada en una fracción equivalente, de modo que el denominador común sea el MCM calculado. Luego realice la operación.*

   Solución. Note que

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{5}{6} &= \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} + \frac{5\cdot 2}{6\cdot 2}\\ &= \frac{9}{12} + \frac{10}{12}\\ &= \frac{19}{12}.\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 1.3.3. *Sean a, b, c y d números enteros, con $b, d > 0$. Considere la suma*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d},$$

Transforme cada fracción de la operación dada en una fracción equivalente, de modo que ambos sumandos tengan el mismo denominador. Luego realice la operación dada.

Solución. Pensemos en el MCM entre los denominadores como el producto bd. De este modo,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b}\\ &= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}\\ &= \frac{ad + bc}{bd}.\end{aligned}$$

□

Tenemos que

Proposición 1.3.4. *Sean a, b, c y d números enteros con $b, d > 0$. Se tiene que*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

y

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Observación 1.3.3. Para sumar o restar fracciones que tienen distinto denominador, transformamos una o varias de estas fracciones en una fracción equivalente (según sea necesario), de modo que todas tengan denominador común. Posteriormente efectuamos la operación respectiva. Usualmente el denominador común escogido es el MCM entre los denominadores.

Observación 1.3.4. Un ***error frecuente*** cometido por los estudiantes al momento de sumar fracciones, es sumar numerador con numerador y denominador con denominador, esto es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + b}{c + d}$$

ESTA AFIRMACIÓN NO SE CUMPLE.

1.3.3. Número mixto.

Definición 1.3.5. *Sean a y b números naturales, con $a > b$. Si al realizar la división*

$$a \div b$$

obtenemos cuociente c y resto r, entonces la fracción $\dfrac{a}{b}$ puede ser expresada como

$$\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b},$$

lo cual se denota como

$$\frac{a}{b} = C\frac{r}{b}. \tag{1.3.6}$$

*La expresión del miembro derecho de (1.3.6), se denomina **número mixto**. Más aún c se denomina **parte entera**, y $\frac{r}{b}$ se denomina **parte fraccionaria** del número mixto.*

Ejemplo 1.3.6. *Cuatro muchachos aventureros se aprestan a realizar un trekking en el Parque Nacional Radal Siete Tazas. Desean repartir en forma equitativa los 11 litros de agua que poseen en algunos bidones. Si el grupo posee en una caja varias cantimploras de 1 litro de capacidad ¿Cuántas cantimploras le corresponden a cada uno?*

Solución. Hacemos

$$11 \div 4$$

cuyo cuociente es 2, y cuyo resto es 3. Note que, en general cuando dividimos dos números naturales, en la forma

$$\text{dividendo} \div \text{divisor}$$

entonces

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cuociente} + \text{resto}.$$

De este modo, dividiendo cada término de la igualdad anterior por el dividendo, deducimos que

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cuociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$$

En nuestro caso particular, esto es

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4}.$$

Así, a cada muchacho le tocan 2 litros y $\frac{3}{4}$ de litro de agua, por lo que cada uno debe ocupar 3 cantímploras.

Observación 1.3.5. La igualdad

$$\frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \tag{1.3.7}$$

la podemos interpretar como que $\frac{11}{4}$ corresponde a 2 enteros y $\frac{3}{4}$. Otra forma de expresar (1.3.7), es

$$\frac{11}{4} = \mathbf{2}\frac{3}{4}. \tag{1.3.8}$$

En el caso de (1.3.8), decimos que $\frac{11}{4}$ está expresado como **número mixto**, donde la **parte entera** corresponde a 2, y la **parte fraccionaria** a $\frac{3}{4}$. En general, tenemos la siguiente definición:

Ejemplo 1.3.7. *¿A qué número mixto corresponde la fracción* $\frac{15}{6}$*?*

Solución. Lo hacemos de dos formas:

- Primera forma: Hacemos la división $15 \div 6$, obteniendo cuociente 2 y resto 3. De este modo,

$$\frac{15}{6} = \mathbf{2}\frac{3}{6} = \mathbf{2}\frac{1}{2}.$$

- Segunda forma: Expresamos el numerador 15 como suma de su múltiplo de 6 más "cercano" y menor que él, con otro número natural. Es decir,

$$\frac{15}{6} = \frac{12+3}{6}.$$

Separamos la fracción del miembro izquierdo en dos fracciones, quedando

$$\frac{15}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = 2 + \frac{1}{2} = \mathbf{2}\frac{1}{2}.$$

1.3.4. Fracción de una cantidad fija.

Ejercicio 1.3.6. *Don José tiene 36 ovejas. Debido a problemas económicos, decide vender $\frac{2}{3}$ de su rebaño. ¿Cuántas ovejas vendió?*

Solución. Calculamos los $\frac{2}{3}$ de 36. Para ello, dividimos las 36 ovejas en 3 grupos

$$\overbrace{\boxed{\text{12 ovejas}}\boxed{\text{12 ovejas}}\boxed{\text{12 ovejas}}}^{\text{36 ovejas}}$$

de los cuales tomamos sólo 2:

$$\overbrace{\boxed{\text{12 ovejas}}\boxed{\text{12 ovejas}}\boxed{\text{12 ovejas}}}^{\text{36 ovejas}}$$

De este modo, Don José vendió 24 ovejas. □

Ejercicio 1.3.7. *Calcule:*

a) *los $\frac{5}{7}$ de 56*

Solución. Resumimos lo hecho en el ejercicio anterior. Dividimos 56 en 7 grupos. Como

$$56 \div 7 = 8,$$

entonces cada grupo es de 8 unidades. Como necesitamos 5 de tales grupos, hacemos

$$5 \cdot 8 = 40,$$

de donde deducimos que los $\frac{5}{7}$ de 56 corresponden a 40 unidades. □

b) *los $\frac{7}{4}$ de 48*

Solución. Dividimos 48 en 4 partes, obteniendo que cada parte es de 12 unidades. Si consideramos 7 de esas partes, obtenemos que $\frac{7}{4}$ de 48 es 84. □

d) *los* $\frac{5}{6}$ *de 144*

Solución. Esta cantidad, así como también las de los ejercicios anteriores, se puede calcular simplemente realizando

$$\begin{aligned}\frac{5}{6}\cdot 144 &= \frac{5\cdot 144}{6}\\ &= 120.\end{aligned}$$

□

Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se tiene los $\frac{a}{b}$ de c corresponden a

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b}.$$

1.3.5. Multiplicación de fracciones

Definición 1.3.8. *Sean a, b, c, d números naturales. Se tiene que*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Observación 1.3.6. Es decir, al multiplicar dos fracciones, el numerador de la fracción resultante corresponde al producto de los numeradores, y el denominador resultante al producto de los denominadores.

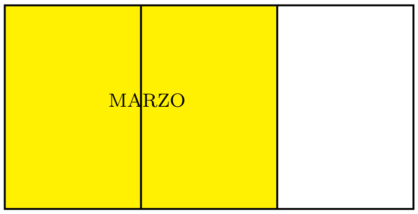
Ejemplo 1.3.9. *Carla desea vender un terreno. Logró venderlo en 3 etapas, del siguiente modo:*

- *En Marzo, vendió $\frac{2}{3}$ del terreno.*
- *En Abril, vendió la cuarta parte de lo que vendió en Marzo.*
- *En Mayo vendió las restantes 3000 hectáreas.*

a) *¿Qué fracción del terreno vendió en el período Marzo-Abril?*

Solución. Resolvemos el problema de dos formas:

- Primera forma: Usando un diagrama. Representamos el terreno por un rectángulo, donde la zona achurada corresponde a lo vendido en Marzo:



En Abril vendió la cuarta parte de lo vendido en Marzo, por lo que necesitamos dividir la zona achurada en 4 partes. Para ello dividimos cada tercio en 2 partes, y obtenemos que

Así, lo que se vendió en Abril es $\frac{1}{6}$ del total. De este modo, según el último rectángulo, en el período Marzo-Abril se vendieron $\frac{5}{6}$ del total.

- Segunda forma: Usando operaciones con fracciones. En Abril se vendio $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ del terreno, es decir

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

del terreno. Por lo tanto, entre Marzo y Abril se vendieron

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

del terreno.

b) *¿Cuántas hectáreas en total posee el terreno?*

Solución. Según lo obtenido en a), las hectáreas vendidas en Mayo, es decir las restantes 3000 hectáreas, corresponden a $\frac{1}{6}$ del total, por lo que el terreno tiene $3000 \cdot 6 = 18000$ hectáreas. □

1.3.6. División de fracciones

Proposición 1.3.10. *Sean a, b, c, d números naturales. Se tiene que*

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

Observación 1.3.7. Informalmente, para obtener la fracción resultante de dividir dos fracciones, multiplicamos la fracción dividendo por la fracción divisor 'invertida".

Ejemplo 1.3.11. *Una caja de detergente rinde para 80 copas de detergente. Si la lavadora de Daniela recomienda 1 copa y cuarto de detergente por lavado, ¿cuántos lavados se pueden hacer con una sóla caja?*

Solución. Para obtener la cantidad de lavados, debemos determinar cuántos grupos de 1 copa y $\frac{1}{4}$ se pueden formar con 80 copas de detergente. Luego, como $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, para obtener la cantidad de lavados, dividimos 80 entre $\frac{5}{4}$, obteniendo

$$\frac{80}{\frac{5}{4}} = 80 \cdot \frac{4}{5} = 64.$$

De este modo, con una sóla caja se pueden hacer 64 lavados. □

1.3.7. Porcentajes

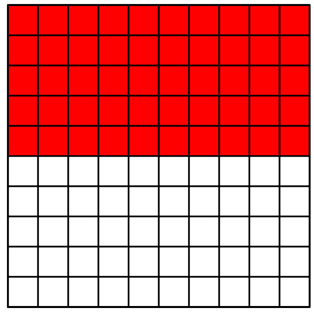
Definición 1.3.12. *Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. El* ***porcentaje*** *$a\,\%$ corresponde a la fracción*

$$a\,\% = \frac{a}{100}.$$

Observación 1.3.8. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. De la definición se desprende que, si queremos calcular el $a\,\%$ de una cantidad c, entonces calculamos los $\frac{a}{100}$ de c.

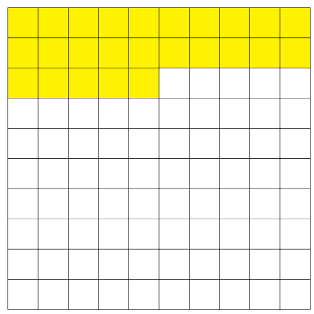
Algunos porcentajes importantes:

- El $50\,\%$ de una cantidad, corresponde a los $\frac{50}{100}$ de ésta, o sea a su mitad:



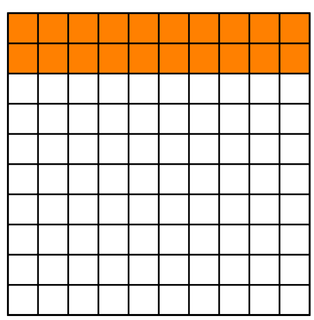
Por ejemplo, el 50 % de 3000 es 1500.

- El 25 % de una cantidad, corresponde a los $\frac{25}{100}$ de ésta, es decir, a su cuarta parte:



Por ejemplo, el 25 % de 120 es 30.

- El 20 % de una cantidad, corresponde a $\frac{20}{100}$ de esta, es decir, a su quinta parte:



Por ejemplo el 20 % de 80 es 16.

Ejemplo 1.3.13. *Calcule:*

a) *el* 75 % *de 72.*

Solución. Se tiene que:

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{x}{72} = \frac{75}{100},$$

de donde $x = 54$.

- Segunda forma: $75\,\%$ corresponde a las $\frac{3}{4}$ partes de 72, es decir, a

$$\frac{3}{4} \cdot 72 = 54.$$

- Tercera forma: Como $75\,\% = 50\,\% + 25\,\%$, la cantidad buscada es la mitad más la mitad de la mitad de 72, es decir $36 + 18 = 54$.

b) *el* $60\,\%$ *de 200.*

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{x}{200} = \frac{60}{100},$$

de donde $x = 120$.

- Segunda forma: El $10\,\%$ de 200 es 20, por lo que el $60\,\%$ de 200 es $6 \cdot 20 = 120$.

c) *el* $16\,\%$ *de 300.*

Solución. Note que el $1\,\%$ de 300 es 3, por lo que el $16\,\%$ es $16 \cdot 3 = 48$.

d) *el* $20\,\%$ *del* $80\,\%$ *de 300.*

Solución. Calculamos primero el $80\,\%$ de 300. Como el $10\,\%$ de 300 es 30, entonces su $80\,\%$ es $8 \cdot 30 = 240$.

Calculamos ahora el $20\,\%$ de 240. Como el $10\,\%$ de 240 es 24, entonces su $20\,\%$ es $2 \cdot 24 = 48$. Por lo tanto, el $20\,\%$ del $80\,\%$ de 300 es 48.

e) *qué porcentaje es 48 de 80.*

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{48}{80} = \frac{x}{100},$$

de la cual $x = 60$, por lo que 48 corresponde al 60 % de 80.

- Segunda forma: Transformamos la fracción $\frac{48}{80}$ en una fracción de denominador 100. En efecto,

$$\frac{48}{80} = \frac{8 \cdot 6}{8 \cdot 10} = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\,\%,$$

por lo que 48 corresponde al 60 % de 80.

- Tercera forma: Transformamos la fracción $\frac{48}{80}$ a número decimal. Se tiene que

$$\frac{48}{80} = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

Como 0,6 es el 60 % de 1, entonces 48 corresponde al 60 % de 80. □

f) *de cual número 12 es el* 40 %.

Solución. Se tiene que

- Primera forma: Planteamos la proporción

$$\frac{12}{x} = \frac{40}{100},$$

de donde $x = 30$, por lo que 12 es el 40 % de 30.

- Segunda forma: Note que como 12 es el 40 % del número buscado, entonces 3 es el 10 %. De este modo el 100 %, y en definitiva el número buscado, es $10 \cdot 3 = 30$.

□

1.4. Números Iracionales

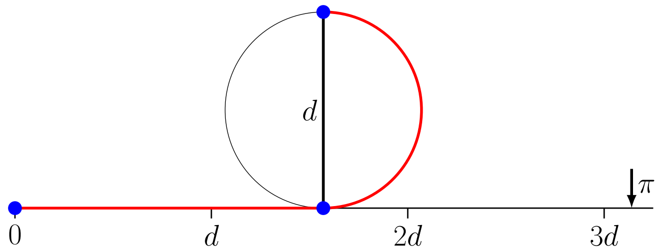
Definición 1.4.1. *Llamamos conjunto de los **números irracionales**, el cual denotamos por $\mathbb{I}$, al conjunto compuesto por todos aquellos números decimales que no pueden ser expresados como una fracción de dos números enteros.*

De lo visto en la sección de números racionales, concluimos que los números irracionales corresponden a decimales infinitos no periódicos ni semiperiódicos. Es decir, los números irracionales corresponden a números decimales que tienen infinitas cifras decimales, en la cual no se repite un patrón de cifras.

El número π es tal vez el más conocido de todos los números irracionales. Su valor, considerando sus primeras cifras decimales es

$$\pi = 3{,}141589\ldots$$

Consideremos una circunferencia de diámetro d, la cual fue formada por una cuerda atada en sus extremos. Al deslizar la circunferencia por una superficie plana, de modo que la cuerda se va desatando, entonces se aprecia que la longitud de la cuerda es aproximadamente $3,14$ veces su diámetro, tal como se observa en la figura:



Para ser más precisos, la longitud de la cuerda es π veces el diámetro de la circunferencia. De acá se deduce, que el perímetro P de una circunferencia de diámetro d es

$$P = \pi \cdot d.$$

Como d es 2 veces el radio r, entonces se deduce que

$$P = 2\pi r.$$

1.5. Ejercicios propuestos

1. Un supermercado tiene 62 trabajadores. Hay 14 hombres menos que mujeres. Si 22 de las mujeres son cajeras ¿cuántas mujeres no trabajan como cajeras?

2. Se jugó la final del torneo de volleybol de un liceo, entre el equipo azul y el equipo blanco. Había el doble de hinchas del equipo azul que del equipo blanco, y el triple de hinchas neutrales que del equipo blanco. Si el público asistente fue de 360 personas ¿cuántos hinchas azules, blancos y neutrales habían?

3. José nació en el año 45 AC. Determine

   4.1) usando la recta numérica

   4.2) usando operaciones aritméticas

   a) el año en que nació una persona que es 40 años mayor que José.

   b) el año en que nació una persona que es 30 años menor que José.

   c) la edad de José en el año 25 DC.

   d) el año en el que José cumplió 27 años.

4. Desde que nació Abraham, en el año 25 AC. su familia realizaba encuentros cada 4 años. ¿Cuántos encuentros se realizaron desde que nació Abraham, hasta su fallecimiento en el año 45 D.C.? ¿Cuántos años pasaron desde el último encuentro en el que estuvo Abraham hasta su fallecimiento?

5. Grafique:

   a) $\frac{3}{5}$ de la mitad de una cantidad.

   b) La mitad de los $\frac{3}{5}$ de una cantidad.

   ¿Qué fracción del total queda en cada caso?

6. En una clase, $\frac{3}{4}$ son niñas. Si hay 8 niños ¿cuántos estudiantes hay en total?

7. Juan tenía 400 llaveros, $\frac{5}{8}$ tenía dibujado un cóndor y el resto tenía dibujado un huemul. Le dió $\frac{1}{5}$ de los llaveros con cóndor a un amigo. ¿Cuántos llaveros le quedaron? ¿A qué fracción del total corresponden los llaveros que le quedaron?

8. Ordene las siguientes fracciones de menor a mayor

    a) $\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{2}{3}$
    b) $\dfrac{5}{6}$ y $\dfrac{9}{14}$
    c) $\dfrac{7}{20}$, $\dfrac{3}{10}$ y $\dfrac{2}{5}$

9. En cada operación siguiente, transforme cada fracción en una fracción equivalente, de modo que el denominador común sea el MCM entre los denominadores. Luego realice la operación.

    a) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{6}$
    b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}$
    c) $\dfrac{5}{6}-\dfrac{7}{9}$
    d) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$
    e) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{4}$
    f) $\dfrac{9}{8}-\dfrac{5}{12}$
    g) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{6}$
    h) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{10}$

10. Realice cada operación siguiente

    a) $\dfrac{72}{25}\cdot\dfrac{75}{8}$
    b) $\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{9}{10}$
    c) $\dfrac{36}{75}\cdot\dfrac{15}{24}$
    d) $\dfrac{40}{\frac{3}{2}}$
    e) $\dfrac{\frac{2}{3}}{2}$
    f) $\dfrac{\frac{15}{9}}{\frac{5}{6}}$

11. Un pintor mezcla $\frac{1}{4}$ de litro de pintura amarilla con $\frac{1}{6}$ de litro de pintura roja.

    a) ¿La mezcla es más amarillenta o más rojiza?

    b) Si el pintor colocara la mezcla en un envase de $\frac{3}{8}$ de litro ¿se derramaría pintura?

c) Si el pintor colocara la mezcla en un envase de 2 litros ¿qué fracción del envase quedaría sin pintura?

12. Un auto de delincuentes va arrancando de la policía, con una rapidez de 33 $\frac{m}{seg}$. El auto toma una peligrosa curva, por lo que frena, disminuyendo su rapidez a razón de $5\frac{1}{2}\frac{m}{seg}$ por segundo. Para no volcarse el auto debe frenar en no más de 7 segundos. ¿Se volcará el auto?

13. Un comerciante tiene a la venta 500 kg de azúcar. Logra vender $\frac{2}{5}$ del total y utiliza $\frac{1}{10}$ para hacer conservas. ¿Cuánta azúcar le quedó?

14. Camila y Andrés toman cada uno una botella de jugo, ambas con la misma cantidad de jugo.

    - Camila tomó $\frac{1}{4}$ de su botella, y más tarde $\frac{2}{3}$ de lo que quedaba.
    - Andrés tomó $\frac{2}{3}$ de su botella, y más tarde $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba

    ¿Tomaron ambos la misma cantidad de jugo?

15. Catalina está preparando un postre. Ella sólo quiere hacer $\frac{2}{3}$ de la cantidad de la receta que tiene. Si para la receta completa se necesita un $\frac{1}{4}$ de una taza de azúcar, ¿cuánta azúcar necesita Catalina?

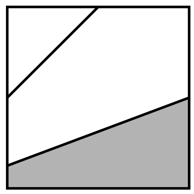
16. Demuestre que cada número decimal siguiente es un número racional, escribiéndolo como fracción irreducible:

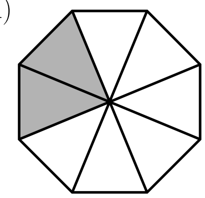
    a) $2,4$
    b) $2,\overline{4}$
    c) $1,\overline{72}$
    d) $0,\overline{345}$
    e) $3,0\overline{1}$
    f) $4,1\overline{56}$
    g) $5,34\overline{5}$

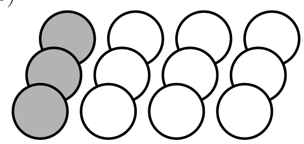
17. ¿Cual(es) de las siguientes representaciones equivale(n) a $\frac{1}{3}$?

a) $0,\overline{3}$

b) $\dfrac{72}{216}$

c) 

d) 

e) 

18. Una porción de arroz equivale a $\frac{1}{4}$ de taza, lo cual corresponde a 50 gramos de arroz. La señora Daniela pretende cocinar arroz para sus 26 trabajadores.

    a) ¿Cuántas tazas de arroz necesitará echar a la olla?

    b) Si un paquete contiene 1 kilo de arroz, ¿le alcanza con un paquete para cocinarle a sus trabajadores?

19. Se tienen 2 litros de agua y se quieren llenar tazas de $\frac{1}{4}$ de litro cada una. ¿Cuántas tazas se pueden llenar?

20. La Federación de Fútbol de Chile puso a la venta las entradas para el partido con Uruguay en tres etapas

    - En la primera etapa, se vendieron $\frac{1}{6}$ del total de entradas.
    - En la segunda etapa, se vendieron $\frac{2}{3}$ de las entradas que sobraron de la primera etapa.
    - En la tercera etapa, se vendieron todas las entradas que sobraron de las dos etapas anteriores, las cuales fueron 15000 entradas.

    a) ¿Qué fracción del total de entradas se vendieron en las dos primeras etapas?

    b) ¿Cuántas entradas en total se vendieron?

    c) ¿Cuántas entradas se vendieron en la segunda etapa?

21. En una tienda hay un descuento del 25 % en un producto cuyo valor es de \$32000. ¿A cuánto dinero equivale el descuento?

22. En una tienda el descuento que se aplica a un producto es 12 %. Si el valor del descuento es \$5200. ¿Cuál es el precio del producto sin descuento?

23. En la misma tienda se aplicó el 15 % de descuento a otro producto. El precio de oferta es \$17000. ¿Cuál es el precio del producto sin descuento?

24. Se realizó un plebiscito entre los habitantes de Pelotillehue y Buenas Peras, para decidir si se construye un puente entre ambas ciudades, con el fin de agilizar el traslado. Se tiene que:

    - $\frac{7}{20}$ de los votantes de Pelotillehue sufragaron en contra del puente.
    - 45 % de los votantes de Buenas Peras sufragaron en contra del puente.
    - 85000 votantes sufragaron a favor del puente.

    Si los votantes de Pelotillehue fueron 80000 y los votantes de Buenas Peras fueron 60000,

    a) ¿Qué porcentaje de votantes de Pelotillehue votaron en contra del puente?
    b) ¿Es cierto que más gente de Buenas Peras que de Pelotillehue votó en contra del puente?
    c) ¿Es cierto que el 80 % de los votantes votaron en contra del puente?
    d) ¿Se construyó el puente?

25. Un campesino desea cercar un terreno circular para albergar a sus 25 animales. Para comodidad de éstos, calcula que cada animal ocupará 4 m^2 de terreno, por lo que desea que el área total tenga 100 m^2. Para delimitar el terreno, usará una cuerda. ¿Cuántos metros de cuerda necesitará?

Capítulo 2

Potencias

2.1. Definición y Propiedades

Consideremos la multiplicación

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Aquí el número 2 aparece 4 veces como factor, lo que se denota como 2^4. Es decir,

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$$

Otros ejemplos son

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$
- $(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1.$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.1.1. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se define la* ***potencia*** *a^n, como la multiplicación de n factores iguales a a. El número a se denomina* ***base*** *y el* *número n se denomina* ***exponente*** *de la potencia respectiva.*

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ veces}$$

Observación 2.1.1. Según la definición anterior, la base indica el número que se repite como factor, tantas veces como lo indica el exponente.

Ejemplo 2.1.2. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos el producto $a^n \cdot a^m$. Note que*

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \ veces} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \ veces}$$

a) *¿Cuántas veces se repite a como factor en el miembro derecho?*

   Solución. $n + m$ veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de a corresponde el producto $a^n \cdot a^m$?*

   Solución. Se tiene que

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Proposición 2.1.3. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

Observación 2.1.2. Es decir, si multiplicamos dos potencias de igual base, se conserva la base y se suman los exponentes.

Ejemplo 2.1.4. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos el cuociente $\dfrac{a^n}{a^m}$, con $n > m$. Note que*

a) *Según esta doble igualdad, luego de realizada la cancelación, ¿cuántas veces se repite a como factor?*

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ veces}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ veces}} = \frac{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)\overbrace{(\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a})}^{m\ veces}}{\underbrace{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \ldots \cdot \cancel{a}}_{m\ veces}}$$

Solución. Dado que inicialmente había n factores a, y luego se cancelaron m de ellos, entonces a queda repetido $n - m$ veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de a corresponde el cuociente* $\frac{a^n}{a^m}$*?*

Solución.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Proposición 2.1.5. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$. Se tiene que*

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

Observación 2.1.3. Es decir, al dividir potencias de igual base, conservamos la base y restamos los exponentes, específicamente, el nuevo exponente corresponde al exponente del numerador menos el exponente del denominador.

Ejemplo 2.1.6. *Sea $a \in \mathbb{R}$ $n, m \in \mathbb{N}$. Consideremos la potencia $(a^n)^m$. Note que*

$$(a^n)^m = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n\ veces}}_{m\ veces}$$

a) *En el miembro derecho, ¿cuántas veces se repite a como factor?*

Solución. m veces n veces, es decir, mn veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de a corresponde el cuociente* $(a^n)^m$*?*

Solución. Se tiene que

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

Proposición 2.1.7. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$(a^n)^m = a^{mn}.$$

Observación 2.1.4. Es decir, para calcular la potencia de una potencia, se conserva la base y se multiplican los exponentes.

Ejemplo 2.1.8. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el producto $a^n \cdot b^n$. Note que*

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot ... \cdot a)}_{n \ veces} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot ... \cdot b)}_{n \ veces}$$

a) *Si "juntamos" los ab del miembro derecho, ¿cuántas veces se repite ab como factor?*

Solución. n veces.

b) *En base a lo respondido en a), ¿a qué potencia de ab corresponde $a^n \cdot b^n$?*

Solución.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

□

Proposición 2.1.9. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

Observación 2.1.5. Es decir, si multiplicamos dos potencias de igual exponente, conservamos el exponente y multiplicamos las bases.

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ veces}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ veces}}$$

Ejemplo 2.1.10. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el cuociente $\frac{a^n}{b^n}$. Note que*

a) Si en el miembro derecho, separamos en multiplicación de fracciones, *¿Cuántas veces se repite $\frac{a}{b}$ como factor?*

Solución. n veces.

b) *En base a lo respondido en a), a qué potencia de $\frac{a}{b}$ corresponde $\frac{a^n}{b^n}$?*

Solución.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Proposición 2.1.11. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Observación 2.1.6. Es decir, si dividimos potencias de igual exponente, conservamos el exponente y dividimos las bases.

Teorema 2.1.12. *(Resumen de propiedades de potencias de exponente natural) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

1.1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1.2) Si $n > m$ entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

1.3) $(a^n)^m = a^{nm}$

1.4) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

1.5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ *con $b \neq 0$.*

2.2. Potencia de exponente cero y potencia de exponente entero.

Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Queremos definir a^0. Note que si $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^0 = a^{n-n}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.2) de potencias, entonces

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1,$$

luego

$$a^0 = 1.$$

Definición 2.2.1. ***(Definición de potencia de exponente cero:)*** *Si $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, entonces $a^0 = 1$.*

Observación 2.2.1. La expresión 0^0 no está definida, dado que si fuera así, para $n \in \mathbb{N}$

$$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0},$$

pero la última fracción no está definida.

Observación 2.2.2. Queremos obtener un valor para la potencia 2^{-5}. Note que

$$2^{-5} = 2^{0-5}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.2) de potencias, entonces

$$2^{-5} = 2^{0-5} = \frac{2^0}{2^5}.$$

Como $2^0 = 1$, entonces

$$2^{-5} = 2^{0-5} = \frac{2^0}{2^5} = \frac{1}{2^5}.$$

En general, consideremos $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ y p un número entero y negativo, es decir, $p \in \mathbb{Z}, p < 0$. Queremos definir a^p. Note que

$$a^p = a^{0-p}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.2) de potencias, entonces

$$a^p = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^{-p}}.$$

Como $a^0 = 1$, entonces

$$a^p = a^{0-p} = \frac{a^0}{a^{-p}} = \frac{1}{a^{-p}}.$$

Note que $-p$ es un número natural.

Definición 2.2.2. ***(Definición de potencia de exponente entero negativo)*** *Sea $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ y $p \in \mathbb{Z},\ p < 0$. Se tiene que*

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}}.$$

Observación 2.2.3. Informalmente, el valor de una potencia de exponente entero negativo, corresponde a 1 dividido por la potencia de la misma base, y exponente en el cual sólo cambia su signo, quedando positivo.

Observación 2.2.4. Se puede probar que todas las propiedades, de la 1.1) a la 1.5) de potencias para exponente natural, también siguen siendo válidas si el exponente es un número entero.

Observación 2.2.5. En general, si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $p \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{b}{a}\right)^{-p}.$$

Informalmente, la fracción se "invierte" y el exponente cambia de signo.

Observación 2.2.6. En general, si $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, y $p \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\frac{a}{b^p} = a \cdot b^{-p}.$$

Informalmente, la potencia del denominador "pasa hacia arriba" multiplicando y con su exponente con signo cambiado.

Teorema 2.2.3. *(Resumen de propiedades de potencias de exponente cero y exponente entero) Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ y $m \in \mathbb{Z}$. Se tiene que*

1.1) $a^0 = 0$

1.2) $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1^m}{a}$

1.3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

2.3. Notación Científica

La notación científica es una forma abreviada de expresar un número positivo muy grande o muy pequeño, como una multiplicación de la forma

$$a \cdot 10^m$$

con $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq a < 10$, y $m \in \mathbb{Z}$. Es decir, a expresar el número dado, como el producto entre un número real entre 1 y 10, sin incluir al 10, por una potencia entera de 10.

Observación 2.3.1.

Realizemos la multiplicación

$$2,1 \cdot 10^4.$$

Es decir, multiplicaremos $2,1$ por 10000, o sea 10 mil veces $2,1$. Note que

- 10 veces 2,1 es 21.
- 100 veces 2,1 es 10 veces 21, es decir 210.
- 1000 veces 2,1 es 10 veces 210, es decir 2100.
- 10000 veces 2,1 es 10 veces 2100, es decir 21000.

De este modo,

$$2,1 \cdot 10^4 = 21000.$$

Luego de ver el resultado de esta multiplicación, podemos interpretarlo como que la coma del $2,1 = 2,100000\ldots$ se "corrió" hacia la derecha 4 veces, obteniendo 210000. Bajo esta lógica,

$$4,3 \cdot 10^5 = 4,3000000\ldots \cdot 10^5 = 430000,$$

lo cual se puede comprobar por ejemplo usando calculadora. En general, para realizar la multiplicación entre un número decimal a, $1 \leq a < 10$ y una potencia de 10 de exponente natural, podemos "correr" la coma de a hacia la derecha tantas veces como lo indique el exponente.

Observación 2.3.2. Realizamos ahora la multiplicación

$$4,1 \cdot 10^{-2},$$

la cual se refiere a la división

$$\frac{4,1}{10^2},$$

o sea $4,1$ dividido en 100 partes. Podemos ver que

$$\frac{4,1}{10^2} = \frac{\frac{41}{10}}{100} = \frac{41}{1000}.$$

Realizamos ahora la división $\frac{41}{1000}$. Si dividimos

- 41 en 10 partes, obtenemos $4,1$.
- 41 en 100 partes, es lo mismo que dividir $4,1$ en 10 partes, o sea $0,41$.
- 41 en 1000 partes, es lo mismo que dividir $0,41$ en 10 partes, o sea $0,041$.

De este modo,

$$4,1 \cdot 10^{-2} = 0,041.$$

Luego de ver el resultado de esta multiplicación, podemos ver que para obtenerla, tomamos $4,1 = \ldots 000004,1$ y "corremos" la coma hacia la izquierda 2 veces para obtener $0,041$. Bajo esta lógica

$$2,35 \cdot 10^{-5} = \ldots 0000002,35 \cdot 10^{-5} = 0,0000235,$$

lo cual puede ser comprobado por ejemplo usando calculadora. En general, para realizar la multiplicación entre un número a, $1 \leq a < 10$ y una potencia de 10 de exponente entero negativo, podemos "correr" la coma de a hacia la izquierda tantas veces como lo indique el valor absoluto del exponente.

2.4. Ejercicios propuestos

a) ¿Verdadero o falso? Justifique.

a) $2^3 = 2 \cdot 3$

b) $\dfrac{2^3}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$

c) $4 \cdot 3^{-2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$

d) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3 \cdot 4}$

e) $2^3 \cdot 2^4 = 4^{3+4}$

f) $\frac{5^6}{5^2} = 5^{\frac{6}{2}}$

g) $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2}$

h) $\frac{2}{3^{-2}} = 18$

i) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{3}$

j) $-3^2 + \frac{3^2}{2} + \frac{9}{2^0} = \frac{9}{2}$

b) Don Andrés apostó \$2000 en fichas en una máquina del casino y obtuvo el triple de lo apostado. Posteriormente apostó todo lo obtenido, y obtuvo el triple por segunda vez. Si siguiera apostando todo lo obtenido, y la tendencia se mantuviera

a) ¿Cuánto dinero obtendría la sexta vez que juega?

b) ¿Cuánto dinero obtendría la n- ésima vez que juega?

c) Observe como obtener el mínimo común múltiplo (MCM) entre 72 y 108:

- Descomponemos ambos números en potencias de números primos, en este caso

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \text{ y } 108 = 3^3 \cdot 2^2$$

- Escogemos la mayor potencia de cada primo presente en alguna de las descomposiciones del paso anterior y luego las multiplicamos, obteniendo el MCM:

$$MCM(72, 108) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$$

Use este mismo procedimiento para

a) obtener el mínimo común múltiplo entre 36 y 600.

b) obtener el mínimo común múltiplo entre 300 y 2160.

c) verificar si $MCM(4500, 5400) = 30^3$.

d) Exprese en notación científica:

a) La temperatura en el centro del Sol, la cual corresponde a 15 millones de grados Celsius.

b) La masa de la cantidad típica de café en una taza, en kilos, si esta corresponde a 150 miligramos.

c) La masa del Titanic en kilos, si esta corresponde a 52 mil toneladas (use que 1tonelada = 1000kilos).

d) El volumen de un glóbulo rojo en mm^3, si este corresponde a $9 \cdot 10^{-17}$ metros cúbicos.

e) Longitud de la muralla china en metros, si esta mide 6400 kms.

e) Exprese en notación decimal:

a) El diámetro de Júpiter en kms, si éste corresponde a $1{,}4 \cdot 10^8$ metros.

b) La masa de un mosquito en miligramos, si este pesa $2 \cdot 10^{-6}$ kg.

c) La masa de la atmósfera de la Tierra en millones de toneladas, si ésta es de $5 \cdot 10^{18}$ kg.

d) Los ingresos de la industria del cine en el mundo durante 2015, en pesos chilenos, si estos corresponden a $3{,}83 \cdot 10^{10}$ doláres (bajo la equivalencia 1 dólar= 630 pesos chilenos).

e) La distancia que recorre una nave en kms, cuando da una vuelta al perímetro la Luna, si este es de $1,09 \cdot 10^{7}$ metros.

f) Se estima que un ser humano adulto tiene alrededor de 86 mil millones de neuronas. El ser vivo que está más cerca de tener tal cantidad de neuronas, es el simio Macaco Rhesus, que tiene aproximadamente $6,3$ millones de neuronas. ¿A cuántas veces la cantidad de neuronas de este simio, corresponden las neuronas del ser humano?
Indicación: Use la aproximación $\dfrac{86}{6{,}3} = 13{,}6$.

g) La masa de la Tierra equivale a $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kgs. La masa de agua presente en la Tierra, es de $1{,}19 \cdot 10^{21}$ kgs. ¿Qué porcentaje de la masa de la Tierra corresponde a masa de agua? Indicación: Use la aproximación $\frac{1{,}19}{5{,}972} = 0{,}2$

h) La superficie de la Tierra corresponde aproximadamente a $510,1$ millones de kms^2. El agua en la tierra ocupa una superficie de aproximadamente $362,17$ millones de kms^2. ¿Qué porcentaje de la superficie de la Tierra está ocupada por agua? Indicación: Use la aproximación $\frac{362{,}17}{510{,}1} = 0,71$.

i) El volumen de agua en la Tierra corresponde a $1{,}4 \cdot 10^{18}\ m^3$. El agua salada en la Tierra, tiene un volumen de $1{,}35 \cdot 10^{18}\ m^3$. ¿Qué porcentaje del agua en la Tierra, corresponde a agua salada?
Indicación: Use la aproximación $\frac{1{,}35}{1{,}4} = 0{,}96$

Capítulo 3

Raices

3.1. Definición y Propiedades

Definición 3.1.1. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \geq 0$. *Decimos que la* ***raíz cuadrada*** *de* a *es* b, *lo que se denota como* $\sqrt{a} = b$, *si*

- $b^2 = a$.
- $b \geq 0$.

Definición 3.1.2. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \geq 0$, *y* $n \in \mathbb{N}, n$ *par. Diremos que la* ***raíz*** n*-ésima de* a *es* b, *lo que se denota como* $\sqrt[n]{a} = b$, *si*

- $b^n = a$.
- $b \geq 0$.

Proposición 3.1.3. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$ $(a, b \geq 0)$ *y* n *es impar (par), entonces*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

es decir, la raíz enésima del producto, corresponde al producto de las raíces enésimas.

Proposición 3.1.4. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \geq 0$ y $b > 0$) y n es impar (par), entonces*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

es decir, la raíz enésima de la división, corresponde a la división de las raíces enésimas.

Ejercicio 3.1.1. *¿Verdadero o falso? Justifique.*

a) $\sqrt{64} = 8$.

Solución. Como $8^2 = 64$ y $8 \geq 0$, la proposición es verdadera.

b) $\sqrt{\dfrac{400}{121}} = \dfrac{40}{11}$.

Solución. Dado que $\sqrt{\frac{400}{121}} = \frac{20}{11}$, la proposición es falsa.

c) $\sqrt{36} = \pm 6$.

Solución. Por definición, $\sqrt{36}$ es un número no negativo, en este caso, $\sqrt{36} = 6$, por lo que la aseveración es falsa.

d) $\sqrt{-64} = 8$.

Solución. En el contexto de los números reales, está definida sólo la raíz cuadrada de un número $a \geq 0$, y en este caso $a = -64 < 0$. La proposición es falsa.

e) $\sqrt{(-7)^2} = -7$.

Solución. Por definición de raíz cuadrada, $\sqrt{(-7)^2}$ es un número no negativo. Más específicamente,

$$\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

La proposición es falsa.

f) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$.

Solución. Note que

$$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$$

y $\sqrt{25}=5$, por lo que la aseveración es falsa. Este ejercicio muestra que la suma de raíces no necesariamente es la raíz de la suma.

g) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{36}$.

Solución. Tenemos que

$$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6=\sqrt{36},$$

por lo que nuestra aseveración es verdadera.

h) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$.

Solución. Como $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$ la aseveración es verdadera. $\square$

i) $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[4]{81}$.

Solución. Note que

$$\sqrt[3]{-27}=-3 \text{ y } \sqrt[4]{81}=3,$$

por lo que la aseveración es verdadera.

j) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\sqrt[4]{\frac{625}{16}}$.

Solución. Dado que

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\frac{5}{4} \text{ y } \sqrt[4]{\frac{625}{16}}=\frac{5}{2},$$

se concluye que la aseveración es falsa. $\square$

k) $\sqrt[27]{-1}=-1$.

Solución. Como $(-1)^{27}=-1$, entonces la proposición es verdadera.

3.2. Simplificación de raíces cuadradas.

Observemos el siguiente ejemplo, en el cual simplificamos $\sqrt{45}$:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}.$$

En este caso, hemos simplificado $\sqrt{45}$. Pasando por alto el tercer miembro $\sqrt{9} \cdot \sqrt{5}$, podríamos decir informalmente que el 9 "sale" de la raíz como su raíz cuadrada, en este caso como 3. En general, simplificar una raíz cuadrada, en forma informal corresponde a

- expresar el número que está "bajo" la raíz como multiplicación.
- "extraer" de la raíz todos los factores que son cuadrados perfectos, cada uno de ellos "sale" de la raíz como su raíz cuadrada.

Formalmente, simplificar una raíz cuadrada es aplicar la proposición 2.7.2 recién vista.

Veamos otro ejemplo. Simplifiquemos $\sqrt{180}$. Hagámoslo de dos formas:

- Primera forma:

$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}.$$

- Segunda forma:

  Para alguien pudiera no resultar evidente que $80 = 36 \cdot 5$. Podemos descomponer 80 en potencias de sus factores primos, obteniendo que $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Luego, vemos que

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = (2 \cdot 3)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}.$$

  Es decir, los números que están al cuadrado dentro de la raíz, "salen" de ella sin el cuadrado.

Veamos un último ejemplo. Simplifiquemos $\sqrt{48}$. Hagámoslo de dos formas:

- Primera forma:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$$

- Segunda forma:

  Para alguien pudiera no resultar evidente que $48 = 16 \cdot 3$. Podemos descomponer 48 en potencias de sus factores primos, obteniendo que $48 = 2^4 \cdot 3$. Luego, vemos que

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

  Es decir, de modo informal, la potencia que está a la cuarta, "sale" de la raíz elevada al cuadrado, es decir, a la mitad de su exponente original.

3.2.1. Raíz enésima

Definición 3.2.1. *Sea $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, n impar. Diremos que la raíz n- ésimade a es b, lo que se denota como $\sqrt[n]{a} = b$, si $b^n = a$.*

Ejemplo 3.2.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, tales que la raíz cuarta de a es b, o sea, se cumple que $\sqrt[4]{a} = b$ ¿Cuáles dos condiciones cumple b?*

Solución. Las dos condiciones que cumple b es que

- $b^4 = a$.
- $b \geq 0$.

$\square$

Definición 3.2.3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$, y $n \in \mathbb{N}, n$ par. Diremos que la* ***raíz*** *n- ésima de a es b, lo que se denota como $\sqrt[n]{a} = b$, si*

- $b^n = a$.
- $b \geq 0$.

Proposición 3.2.4. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ $(a, b \geq 0)$ y n es impar (par), entonces*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

es decir, la raíz enésima del producto, corresponde al producto de las raíces enésimas.

Proposición 3.2.5. *Si $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \geq 0$ y $b > 0)$ y n es impar (par), entonces*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

es decir, la raíz enésima de la división, corresponde a la división de las raíces enésimas.

Observación 3.2.1. Un ***error frecuente*** es el que se comete al asumir que las propiedades anteriores se puesden aplicar a la suma y/o resta de raices, esto es:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

y

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

ESTA PROPIEDAD NO SE CUMPLE.

3.3. Potencia de exponente racional.

Sea a un número real, con $a \geq 0$. Queremos definir la potencia

$$a^{\frac{1}{2}}.$$

Si queremos que se siga cumpliendo la propiedad 1.3) de potencias, es decir, la propiedad de la potencia de un potencia, entonces se debe cumplir que

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a.$$

De este modo, definimos $a^{\frac{1}{2}}$ como

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

Así, por ejemplo tenemos que

$$4^{\frac{1}{2}} = 2,\ 25^{\frac{1}{2}} = 5,\ \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

En general, si $a \geq 0$ y n es un número natural par, entonces

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Por ejemplo,

$$81^{\frac{1}{4}} = 3 \text{ y } 64^{\frac{1}{6}} = 2.$$

Por otro lado, para $a \in \mathbb{R}$ y $n > 1$ un número natural impar, tenemos también que

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Por ejemplo,

$$27^{\frac{1}{3}} = 3,\ \text{ y } (-32)^{\frac{1}{5}} = -2.$$

En resumen tenemos la siguiente definición:

Definición 3.3.1. *Sean $a \geq 0$ ($a \in \mathbb{R}$) y $n \in \mathbb{N}$, con n un número par (impar). Se tiene que*

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Si $a > 0$, queremos definir la potencia

$$a^{\frac{3}{2}}.$$

Para que se siga cumpliendo la propiedad 1.3) de potencias, la definimos como

$$a^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3,$$

es decir

$$a^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{a}\right)^3.$$

De este modo, tenemos por ejemplo que

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

En general, si $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, con n un número par y $\frac{m}{n}$ una fracción irreducible, tenemos que

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Por ejemplo

$$81^{\frac{3}{4}} = \left(81^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Por otro lado, si $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ un número impar, y $\frac{m}{n}$ una fracción irreducible, tenemos que

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Por ejemplo,

$$(-125)^{\frac{2}{3}} = \left((-125)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{-125}\right)^2 = (-5)^2 = 25.$$

En general, tenemos la siguiente definición:

Definición 3.3.2. *Se tiene que*

- *Si $a \geq 0$ $(a \in \mathbb{R})$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ con n un número par (impar) y $\frac{m}{n}$ una fracción irreducible. La **potencia racional** de a se define por*

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

- *Además, $0^{\frac{m}{n}} = 0$, si y sólo si $m \neq 0$, es decir, si el exponente no es cero. Por otro lado, 0^0 no está definido.*

Observación 3.3.1. Según la definición, cuando calculamos una potencia de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, n indica el índice de la raíz que se calcula primero y m indica el exponente al que debe ser elevado tal raíz n-ésima.

Observación 3.3.2. Se puede probar que todas las propiedades 1.1) a 1.5) de potencias para exponente natural, también siguen siendo válidas si el exponente es un número racional.

Observación 3.3.3. Note que el exponente de una potencia racional debe ser una fracción irreducible, dado que si no lo es, pueden ocurrir cosas como que, por un lado

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = \left(\sqrt[6]{-1}\right)^2,$$

o sea $(-1)^{\frac{2}{6}}$ no estaría definido. Sin embargo, por otro lado

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

3.4. Racionalización

Ejemplo 3.4.1. *Exprese la fracción* $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *sin raíces en el denominador.*

Solución. Multiplicamos la fracción dada por $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, es decir por 1:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

Note que en el denominador queda una suma por su diferencia. De este modo,

$$\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{3-2} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2.$$

Así, desarrollando el cuadrado del binomio, obtenemos que

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

□

Observación 3.4.1. El proceso en el cual se eliminan las raíces del denominador de una fracción, amplificando numerador y denominador por el mismo número, se denomina **racionalización**.

3.5. Ejercicios propuestos

1. ¿Verdadero o falso? Justifique.

   a) $\sqrt{36} = \pm 6$

   b) $\sqrt{108} = 3\sqrt{6}$

   c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$

   d) $\sqrt[4]{81} - \sqrt[6]{729} = 0$

   e) $\sqrt[3]{-27} - \sqrt[3]{27} = 0$

   f) $\sqrt[53]{-1} = 1$

   g) $\sqrt{0{,}36} = \frac{3}{5}$

   h) $\sqrt{4{,}5} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

   i) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{\frac{15}{4}}$

   j) $\sqrt{180} - \sqrt{90} \cdot \sqrt{18} + \sqrt{500} = 2\sqrt{5}$

   k) $\sqrt[4]{-81} = -2$

   l) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{64}} = -\sqrt[4]{\dfrac{81}{256}}$

   m) $\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$

   n) $\sqrt[4]{144} = 2\sqrt{3}$

   o) $\sqrt[6]{8} = \sqrt{2}$

2. Si $x = \sqrt{5}$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 25$?

3. Si $x = 1 + \sqrt{2}$, ¿cuál es el valor de $x^2 - 2x - 1$?

4. Lea y responda:

   a) ¿Es siempre $\sqrt{x} > 0$, para cualquier $x \geq 0$?

   b) ¿Existe algún número real x que cumpla que $x < \sqrt{x}$?

   c) Si es que existe algún número real x tal que $x < \sqrt{x}$, ¿este es único?

5. Una cámara de televisión observa a un cohete, que en el momento de ser captado por la cámara está 5,5 kms de altura. Si la cámara está ubicada a 2,2 kms de la plataforma de despegue, ¿cuál de las siguientes opciones corresponde a la distancia entre la cámara y el cohete?

   a) $\frac{11}{2}\sqrt{2}$ kms.

   b) $\frac{33}{10}$ kms.

   c) $\frac{11}{5}\sqrt{2}$ kms.

d) $\frac{11}{10}\sqrt{29}$ kms.

e) $\frac{11}{10}\sqrt{21}$ kms.

6. Una escalera está apoyada sobre una pared. Si la altura que alcanza la escalera sobre la pared es de 3 metros, y la distancia desde el pie de la escalera hasta la pared es $\sqrt{3}$ metros, ¿cuánto mide la escalera?

7. Se desean cercar dos terrenos cuadrados A y B con cuerda. El lado del terreno A mide $4\sqrt{2}$ metros y el lado del terreno B mide $3\sqrt{3}$ metros. Para ser cercado, ¿cuál de los dos terrenos requiere una cuerda más larga?